TRANG THÔNG TIN LUẬN ÁN

Tên đề tài luận án: *Hàm khoảng cách, bài toán tổng bình phương bé nhất và một số vấn đề liên quan*
Ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số ngành: 9460104
Họ tên nghiên cứu sinh: Phan Ngọc Yến
Khóa đào tạo: 2022
Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. Đinh Trung Hòa
TS. Nguyễn Anh Thi
Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG - TPHCM

1. **TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN ÁN**

   Luận án giới thiệu một số hàm khoảng cách mới được xây dựng từ các trung bình ma trận và xem xét bài toán tổng bình phương bé nhất tương ứng với các hàm khoảng cách mới này. Hơn nữa, một số phương trình ma trận chứa trung bình nhân có trọng số dạng $A\natural_t B$ với $1 < t \le 2$ cũng được xem xét theo sau:

$$X = \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t A_i)M_i,$$

$$X^s = \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t A_i)M_i, \quad \text{với } s > t-1, 1 < t \le 2,$$

$$X^s = A + \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t B_i)M_i \quad \text{với } s > 0, 1 < t \le 2.$$

2. **NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN**

   a) **Luận án thiết lập hàm khoảng cách mới $\Phi_1(X,Y)$ và giải bài toán tổng bình phương bé nhất tương ứng.** Hàm khoảng cách $\Phi_1(X,Y)$ thỏa mãn điều kiện của bất đẳng thức xử lý dữ liệu trong lý thuyết thông tin lượng tử. Hơn nữa, luận án chứng minh hàm khoảng cách này thỏa mãn tính chất điểm giữa với trung bình ma trận mũ p, $\mu_p(t,X,Y) := (tX^p + (1-t)Y^p)^{1/p}$.

   b) Với phương trình ma trận liên quan đến trung bình nhân có trọng số $X\natural_t Y, t \in (1,2)$, **luận án chứng minh khoảng cách Thompson giữa các nghiệm không vượt quá một hằng số.** Hơn nữa, luận án nghiên cứu trung bình nhân có trọng số $X\natural_t Y$ với $1 < t < 2$ để **thiết lập hàm khoảng cách Hellinger mới $\Phi_2(X,Y)$, giải bài toán tổng bình phương bé nhất tương ứng** và đồng thời chứng minh hàm khoảng cách này cũng thỏa mãn điều kiện của bất đẳng thức xử lý dữ liệu trong lý thuyết thông tin lượng tử.

c) **Luận án giới thiệu lớp các hàm khoảng cách mới $\Phi_{g,\sigma}(X,Y)$ sinh bởi bất đẳng thức đơn điệu.** Bài toán ngược cho hệ phương trình ma trận liên quan đến hàm khoảng cách này cũng được xem xét. Từ đó, luận án đạt được sự mô tả về hàm vết ma trận thông qua hàm khoảng cách mới này.

d) Luận án chứng minh được các phương trình ma trận sau:

$$X^s = \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t A_i)M_i \quad \text{với } s > t-1, 1 < t \leq 2$$

$$X^s = A + \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t B_i)M_i \quad \text{với } s > 0, 1 < t \leq 2$$

có nghiệm trên $\mathbb{P}_n$.

3. CÁC ỨNG DỤNG/KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU

a) Xây dựng các hàm khoảng cách dựa trên trung bình Kubo-Ando mở rộng

$$P(t,X,Y) = X^{1/2}\left(\frac{I + (X^{-1/2}YX^{-1/2})^t}{2}\right)^{1/t} X^{1/2} \quad \text{với} \quad t > 0.$$

b) Thiết lập một khoảng cách $d_s(X,Y)$ trên $\mathbb{P}_n$ sao cho

$$\lim_{s\to 0^+} d_s(X,Y) = \|\log X - \log Y\|_F \,;\, \lim_{s\to 1^-} d_s(X,Y) = \|X-Y\|_F\,.$$

Xem xét bài toán tổng bình phương bé nhất với $d_s(X,Y)$ và bài toán tổng bình phương bé nhất trong trường hợp $s \to 0$ và $s \to 1$.

c) Xem xét phương trình ma trận liên quan đến trung bình Kubo-Ando có dạng $X^s = \sum_{i=1}^{m} w_i(X^{-1}\sigma A_i)$ với $s > 0$.

TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN		NGHIÊN CỨU SINH
		(Ký tên, họ tên)
PGS.TS. Đinh Trung Hòa	TS. Nguyễn Anh Thi	Phan Ngọc Yến

XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO

KT. HIỆU TRƯỞNG

THESIS INFORMATION

Thesis title: Some distance functions, least square problems and related questions
Speciality: Algebra and Number theory
Code: 9460104
Name of PhD Student: Phan Ngọc Yến
Academic year: 2022
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Đinh Trung Hòa
At: Troy University, USA
and Dr. Nguyễn Anh Thi
At: VNUHCM - University of Science

1. **SUMMARY**

We focus on establishing new quantum divergences from matrix means and consider the least squares problem corresponding to these quantum divergences. Furthermore, we study some matrix equations containing the weighted geometric mean of the form $A\natural_t B$ as follows:

$$X = \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t A_i)M_i,$$

$$X^s = \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t A_i)M_i, \quad \text{for } s > t-1, 1 < t \leq 2,$$

$$X^s = A + \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t B_i)M_i, \quad \text{for } s > 0, 1 < t \leq 2.$$

2. **NOVELTY OF THESIS**

   a) **The new quantum divergence $\Phi_1(X,Y)$ and least square problems with respect to this divergence are considered.** The new quantum divergence $\Phi_1(X,Y)$ satisfies the data processing inequality in quantum information theory. In addition, matrix p-power mean $\mu_p(t,A,B) := (tA^p + (1-t)B^p)^{1/p}$ satisfies the in-betweenness property with respect to the new divergence.

   b) With the matrix equation involving the matrix geometric mean $A\natural_t B$ for $t \in (1,2)$, We prove that **the Thompson distance between the**

solutions do not exceed contants. We also use the weighted geometric mean $A\natural_t B$ to define **a new quantum Hellinger divergence and least square problems with respect to this divergence are considered.** The new Hellinger quantum divergence satisfies the Data Processing Inequality.

c) **The new class of quantum divergences generated by monotonicity inequality is introduced.** We also consider some related inverse problems for matrix means. As a consequence, we obtain some new characterizations of the trace property via this new quantum divergence.

d) We investigate several well-known matrix equations involving the extended weighted geometric mean by following:

$$X^s = \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t A_i)M_i, \quad \text{for } s > t-1, 1 < t \leq 2$$

$$X^s = A + \sum_{i=1}^{m} M_i^*(X\natural_t B_i)M_i, \quad \text{for } s > 0, 1 < t \leq 2.$$

3. **APPLICATIONS/ APPLICABILITY/ PERSPECTIVE**

a) We construct new quantum divergences based on Kubo-Ando power means

$$P(t,X,Y) = X^{1/2}\left(\frac{I + (X^{-1/2}YX^{-1/2})^t}{2}\right)^{1/t} X^{1/2}, \quad \text{for} \quad t > 0.$$

b) We construct a new distance $d_s(X,Y)$ on $\mathbb{P}_n$ such that

$$\lim_{s\to 0^+} d_s(X,Y) = \|\log X - \log Y\|_F := d_R(X,Y),$$
$$\lim_{s\to 1^-} d_s(X,Y) = \|X - Y\|_F := d_E(X,Y).$$

We also consider the least square problem with $d_s(X,Y)$ and in the least square problem in the limit case when $s \to 0$ and $s \to 1$.

c) We consider the matrix Kubo-Ando equation by following

$$X^s = \sum_{i=1}^{m} w_i(X^{-1}\sigma A_i) \quad \text{for} \quad s > 0.$$

SUPERVISORS		PhD STUDENT
Assoc. Prof. Dr. Đinh Trung Hòa	Dr. Nguyễn Anh Thi	Phan Ngọc Yến

CONFIRMATION UNIVERSITY OF SCIENCE
VICE PRESIDENT