

TRANG THÔNG TIN LUẬN ÁN

Tên đề tài luận án:

HÀM KHOẢNG CÁCH LƯỢNG TỬ, PHƯƠNG TRÌNH MA TRẬN PHI TUYẾN VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Ngành: Đại số và lý thuyết số

Mã số ngành: 9460104

Họ tên nghiên cứu sinh: Nguyễn Duy Ái Nhân

Khóa đào tạo: 2022-2025

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Đinh Trung Hòa

TS. Nguyễn Anh Thi

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG.HCM

1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN ÁN

Luận án tập trung nghiên cứu một hàm khoảng cách lượng tử mới dạng Hellinger, khảo sát các tính chất liên quan như tính chất điểm giữa, bất đẳng thức xử lý dữ liệu và bài toán tổng bình phương bé nhất. Ngoài ra, luận án mở rộng hai phương trình ma trận phi tuyến từ trung bình nhân có trọng số sang trung bình có trọng số tương ứng với trung bình Kubo-Ando đối xứng bất kỳ. Đồng thời, bằng cách biểu diễn trung bình Wasserstein thông qua trung bình nhân có trọng số 2, luận án chứng minh sự tồn tại nghiệm của một số hệ phương trình ma trận phi tuyến liên quan đến trung bình Wasserstein, một trung bình không thuộc lớp trung bình ma trận Kubo-Ando.

2. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN

Luận án đã đạt được những kết quả sau:

a. Xây dựng một hàm khoảng cách lượng tử mới.

Cụ thể, với $h(x)$ là hàm đối xứng của hàm $\sqrt{x}$ qua đường thẳng $y = \frac{x+1}{2}$ và $g(x) = h(x) - \frac{x+1}{2}$, luận án chỉ ra rằng

$$\Phi(A, B) = \text{Tr} \left(A g \left(A^{-1/2} B A^{-1/2} \right) \right)$$

là một hàm khoảng cách lượng tử, gọi là hàm khoảng cách dạng Hellinger lượng tử.

b. Chứng minh một số tính chất liên quan tới hàm khoảng cách dạng Hellinger lượng tử.

Cụ thể, luận án chỉ ra rằng hàm khoảng cách dạng Hellinger lượng tử nêu trên thỏa mãn tính chất điểm giữa, bất đẳng thức xử lý dữ liệu và tồn tại nghiệm cho bài toán tổng bình phương bé nhất ứng với hàm khoảng cách lượng tử mới này.

c. Chứng minh sự tồn tại nghiệm của 2 dạng phương trình ma trận phi tuyến được mở rộng từ các kết quả trước đó.

Cụ thể, luận án chỉ ra sự tồn tại nghiệm của các phương trình

$$X^p = A + \sum_{i=1}^m M_i^* (X \sigma_t B) M_i$$

và

$$X^p = A + \sum_{i=1}^j M_i^* (X \sigma_t B) M_i + \sum_{i=j+1}^m M_i^* (X^{-1} \sigma_t B) M_i,$$

trong đó $A, B \in \mathbb{P}_n$, $M_1, M_2, \dots, M_m \in \mathbb{M}_n$ là các ma trận khả nghịch, p, m là các số nguyên dương với $p \geq 2$, và σ_t là trung bình có trọng số tương ứng với trung bình Kubo-Ando đối xứng σ .

d. Chứng minh sự tồn tại nghiệm của một số hệ phương trình ma trận phi tuyến chứa trung bình Wasserstein.

Cụ thể, luận án sử dụng biểu diễn trung bình Wasserstein dưới dạng

$$A \diamond B = A^{-1} \sharp_2 [I \nabla (A^{-1} \sharp B)]$$

và mối liên hệ giữa trung bình Wasserstein và trung bình cộng để thiết lập một số hệ phương trình ma trận phi tuyến và chỉ ra sự tồn tại nghiệm.

3. CÁC ỨNG DỤNG/KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU

Dựa vào biểu diễn của một số trung bình, chẳng hạn như trung bình Wasserstein và trung bình nhân dạng phổ, qua trung bình nhân có trọng số 2, chúng tôi hướng đến việc thiết lập mối liên hệ mới giữa các trung bình, xây dựng các hàm khoảng cách lượng tử mới dựa trên các mối quan hệ đó và tập trung vào bài toán mô tả hàm đơn điệu toán tử. Đây cũng chính là các hướng nghiên cứu tiếp theo của đề tài.

TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN

NGHIÊN CỨU SINH

Đinh Trung Hòa

Nguyễn Anh Thi

Nguyễn Duy Ái Nhân

XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO

KT. HIỆU TRƯỞNG

PHÓ HIỆU TRƯỞNG

Nguyễn Trung Nhân

THESIS INFORMATION

Thesis title:

SOME QUANTUM DIVERGENCES, NON-LINEAR MATRIX EQUATIONS AND RELATED PROBLEMS

Speciality: Algebra and Number Theory

Code: 9460104

Name of PhD Student: Nguyen Duy Ai Nhan

Academic year: 2022-2025

Supervisor: Assoc. Prof., Dr. Dinh Trung Hoa

Dr. Nguyen Anh Thi

At: VNUHCM - University of Science

1. SUMMARY

This thesis investigates a new quantum Hellinger-type divergence and examines its related properties, such as the In-betweenness Property, the Data Processing Inequality, and the Least Squares Problem. It also extends two nonlinear matrix equations from the weighted geometric mean to a weighted matrix mean corresponding to an arbitrary symmetric Kubo-Ando mean. Additionally, by representing the Wasserstein mean via the 2-geometric mean, the thesis establishes the existence of solutions for some systems of nonlinear matrix equations involving the Wasserstein mean, a type of mean that does not belong to the class of Kubo-Ando matrix means.

2. NOVELTY OF THESIS

The main results are listed as follows:

a. A new quantum divergence function has been constructed.

Specifically, if $h(x)$ be the function that is symmetric to $\sqrt{x}$ with respect to the line $y = \frac{x+1}{2}$ and $g(x) = h(x) - \frac{x+1}{2}$ then

$$\Phi(A, B) = \text{Tr} \left(Ag \left(A^{-1/2} B A^{-1/2} \right) \right)$$

is a quantum divergence, called the quantum Hellinger-type divergence.

b. Proving several properties related to the quantum Hellinger-type divergence. Specifically, the thesis shows that the above-mentioned quantum Hellinger-type divergence satisfies the In-betweenness property, the Data processing Inequality, and the existence of solutions for the Least squares problem for this new quantum divergence.

c. Proving the existence of solutions for two forms of nonlinear matrix equations extended from previous results.

Specifically, the thesis shows the existence of solutions for the equations

$$X^p = A + \sum_{i=1}^m M_i^* (X \sigma_t B) M_i$$

and

$$X^p = A + \sum_{i=1}^j M_i^* (X \sigma_t B) M_i + \sum_{i=j+1}^m M_i^* (X^{-1} \sigma_t B) M_i,$$

where $A, B \in \mathbb{P}_n$, $M_1, M_2, \dots, M_m \in \mathbb{M}_n$ are nonsingular matrices, p, m are positive integers with $p \geq 2$, and σ_t is a weighted mean corresponding to an arbitrary symmetric Kubo–Ando mean σ .

d. Proving the existence of solutions for some systems of nonlinear matrix equations involving the Wasserstein means.

Specifically, the thesis uses the representation of Wasserstein mean as

$$A \diamond B = A^{-1} \sharp_2 [I \nabla (A^{-1} \sharp B)]$$

and the relationship between the Wasserstein mean and the arithmetic mean to establish some systems of nonlinear matrix equations and demonstrate the existence of solutions.

3. APPLICATIONS/ APPLICABILITY/ PERSPECTIVE

By representing certain types of means, such as the Wasserstein mean and the spectral geometric mean, via the 2-geometric mean, the goals are to establish new relationships between means, construct new quantum divergence functions based on these relationships, and focus on the problem of characterizing operator monotone functions. These directions also constitute the subsequent research objectives of the thesis.

SUPERVISORS

PhD STUDENT

Dinh Trung Hoa

Nguyen Anh Thi

Nguyen Duy Ai Nhan

**CERTIFICATION
UNIVERSITY OF SCIENCE
VICE PRESIDENT**

Nguyen Trung Nhan