**TÓM TẮT THÔNG TIN LUẬN ÁN**

Tên đề tài luận án: *Sự tồn tại nghiệm và đối ngẫu cho một số lớp bài toán tối ưu không trơn*

Ngành: Toán ứng dụng

Mã số ngành: 9460112

Họ tên nghiên cứu sinh: Nguyễn Cảnh Hùng

Khóa đào tạo: 2022

Giảng viên hướng dẫn:

* Hướng dẫn chính: TS. Thái Doãn Chương
* Đồng hướng dẫn: PGS.TS. Nguyễn Lê Hoàng Anh

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học tự nhiên, ĐHQG.HCM

**1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN ÁN**

Trong luận án này, chúng tôi xét không gian Euclid *n* chiềuvà sử dụng các công cụ của giải tích biến phân cùng với những phương pháp mới từ hình học nửa đại số để thiết lập *sự tồn tại nghiệm tối ưu, tính chất khác rỗng và compact khác rỗng của tập nghiệm, điều kiện tối ưu và khảo sát lý thuyết đối ngẫu* cho lớp bài toán tối ưu/tối ưu vững không trơn và không lồi.

Cụ thể, với bài toán tối ưu có hữu hạn ràng buộc hàm, chúng tôi trước hết khảo sát sự tồn tại nghiệm tối ưu toàn cục và điều kiện để tập nghiệm tối ưu của bài toán là compact và khác rỗng. Tiếp đó, chúng tôi xem xét bài toán tối ưu vững, tập trung vào câu hỏi khi nào nó có nghiệm tối ưu. Cuối cùng, chúng tôi thiết lập các điều kiện tối ưu và đối ngẫu cho lớp bài toán tối ưu vững tổng quát hơn, trong đó tập ràng buộc bao gồm cả ràng buộc hàm và ràng buộc tập.

**2. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN**

Chúng tôi nghiên cứu các tính chất của giá trị tối ưu/giá trị infimum và nghiệm tối ưu toàn cục cho một bài toán tối ưu, trong đó các hàm được giả thiết là không trơn và không lồi. Cụ thể, chúng tôi thiết lập các điều kiện đảm bảo tập nghiệm của bài toán là khác rỗng hoặc compact khác rỗng. Chúng tôi cũng đưa ra các điều kiện để đảm bảo tính chất compact hoặc không compact của các tập dưới mức, tính chất bị chặn dưới của hàm mục tiêu và tính chất bức của bài toán.

Để xử lý bài toán tối ưu vững, chúng tôi giới thiệu đa tạp tiếp xúc suy rộng tại vô hạn. Dựa vào đó, trước tiên chúng tôi khảo sát tính chất bị chặn dưới của giá trị infimum của bài toán thông qua việc cực tiểu hóa hàm mục tiêu trên đa tạp tiếp xúc tại vô hạn. Tiếp theo, chúng tôi thiết lập sự tương đương giữa các khái niệm: tính M-tame vững, tính riêng vững và điều kiện Palais–Smale vững. Các kết quả này sau đó được áp dụng để suy ra các kết quả mới về sự tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu vững.

Chúng tôi đưa ra các điều kiện tối ưu cần cho bài toán tối ưu vững với cả ràng buộc hàm và hữu hạn ràng buộc tập. Tiếp theo là giới thiệu khái niệm lồi suy rộng và sau đó áp dụng để thiết lập các điều kiện tối ưu đủ. Ngoài ra, chúng tôi xây dựng bài toán đối ngẫu và khảo sát mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu, bao gồm đối ngẫu yếu, đối ngẫu mạnh và đối ngẫu ngược.

**3.** **CÁC ỨNG DỤNG/ KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU**

Điều kiện tối ưu, phân tích sự tồn tại nghiệm và lý thuyết đối ngẫu trong các bài toán tối ưu vững không trơn và không lồi là những nguyên lý và kỹ thuật hữu ích có thể được sử dụng để tìm hoặc kiểm tra nghiệm cho nhiều bài toán thực tiễn và trong đời sống. Do đó, việc thiết lập các điều kiện tối ưu, phân tích sự tồn tại nghiệm cũng như xây dựng các mối quan hệ đối ngẫu cho các bài toán tối ưu vững không trơn và không lồi đóng vai trò then chốt trong việc mô hình hóa và giải quyết các bài toán thực tế.

Các phương pháp và kết quả đạt được trong luận án này có thể được áp dụng để nghiên cứu các chủ đề liên quan như giải tích tiệm cận, khảo sát theo hướng hoặc thiết lập các tính chất tối ưu cho lớp bài toán tổng quát hơn chẳng hạn như bài toán tối ưu đa mục tiêu hoặc tối ưu đa trị. Bên cạnh đó, một số biến thể dưới vi phân được nghiên cứu gần đây, như dưới vi phân theo tập, theo hướng và tại vô hạn, đã được áp dụng cho các bài toán tối ưu không trơn và thu được nhiều kết quả quan trọng. Do đó, việc tiếp tục khai thác các hướng nghiên cứu này cũng như phát triển thêm biến thể mới để áp dụng vào các bài toán tối ưu là một hướng đi tiềm năng trong tương lai.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN**    TS. Thái Doãn Chương PGS.TS. Nguyễn Lê Hoàng Anh | **NGHIÊN CỨU SINH**  Nguyễn Cảnh Hùng | |
|  | |  | |

**XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO**

**KT. HIỆU TRƯỞNG**

**THESIS INFORMATION**

Thesis title: *Solution existence and duality for classes of nonsmooth optimization problems*

Speciality: Applied Mathematics

Code: 9460112

Name of PhD Student: Nguyen Canh Hung

Academic year: 2022

Supervisor:

1. PhD. Thai Doan Chuong

2. Assc. Prof. Nguyen Le Hoang Anh

At: VNUHCM - University of Science.

**1. SUMMARY**

In this dissertation, we consider the *n*-dimensional Euclidean space and employ tools from variational analysis along with novel approaches from semi-algebraic geometry to establish *existence of optimal solutions, nonemptiness and compactness properties of the solution set, optimality conditions, and explore duality theory* for classes of nonsmooth and nonconvex optimization/robust optimization problems.

Specifically, for optimization problems with finitely many functional constraints, we first investigate the existence of global optimal solutions and conditions under which the solution set is nonempty and compact. We then study robust optimization problems, focusing on the question of when such problems admit optimal solutions. Finally, we establish optimality conditions and duality results for a more general class of robust optimization problems, in which the constraint set involves both functional and set constraints.

**2. NOVELTY OF THESIS**

We investigate the properties of the optimal value/infimum value and global optimal solutions for an optimization problem, where the involved functions are assumed to be nonsmooth and nonconvex. Particularly, we establish conditions ensuring that the solution set of the problem is nonempty or nonempty compact. We also provide conditions that guarantee the compactness or non-compactness of sublevel sets, the boundedness from below of the objective function, and the coercivity of the problem.

To deal with a robust optimization problem, we introduce an extended tangency variety at infinity. Based on this construction, we first examine the boundedness from below of infimum value of the problem via the minimization of the objective function over the extended tangency variety at infinity. We then establish the equivalence among the notions of robust M-tameness, robust properness, and the robust Palais–Smale condition. These results are subsequently applied to derive new solution existence results for the robust optimization problem.

We present necessary optimality conditions for a robust optimization problem with both functional and finitely many set constraints. We then introduce the notion of generalized convexity and apply it to establish sufficient optimality conditions. In addition, we formulate the dual problem and examine the relationships between the primal and dual problems, including weak duality, strong duality, and converse duality.

**3**. **APPLICATIONS/ APPLICABILITY/ PERSPECTIVE**

Optimality, solution existence analysis and duality in robust nonsmooth and nonconvex optimization problems are useful principles and techniques that can be used to find or verify solutions for many practical and real-life problems. Therefore, obtaining optimality conditions, analyzing solution existence as well as establishing dual relationships for robust nonsmooth and nonconvex optimization problems are pivotal when modeling and solving real-world problems.

The approaches and the results obtained in this thesis can be employed to examine related topics such as asymptotic analysis and directional explorations or more general optimization settings such as multiobjective or set-valued optimization problems. In addition, several variants of subdifferentials studied in recent years such as subdifferential with respect to a set, directional subdifferential, and subdifferential at infinity have been successfully applied to nonsmooth optimization problems, leading to significant results. Therefore, further exploration of these directions, as well as the development of new variants for applications in optimization, represents a promising avenue for future research.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **SUPERVISORS**   |  |  | | --- | --- | | 1. PhD. Thai Doan Chuong |  |   2. Assc. Prof. Nguyen Le Hoang Anh | **PhD STUDENT**  Nguyen Canh Hung |

**CERTIFICATION UNIVERSITY OF SCIENCE**

**VICE PRESIDENT**