TRANG THÔNG TIN LUẬN ÁN

Tên đề tài luận án: **Một số phương trình khuếch tán có yếu tố ngẫu nhiên**

Ngành: Toán giải tích

Mã số Ngành: 9460102

Họ tên nghiên cứu sinh: **TRẦN NGỌC THẠCH**

Khóa đào tạo: 2020

Người hướng dẫn khoa học: **PGS.TS. NGUYỄN HUY TUẤN, TS. NGUYỄN MINH QUÂN**

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG.HCM

# TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN ÁN:

Kết quả của luận án này được tổng hợp từ bốn bài báo đã được công bố trên các tạp chí Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Asymptotic Analysis, Stochastics and Dynamics, Bulletin des Sciences Mathématiques, được chia thành bốn mục ở chương 4 như sau.

* Mục 4.1: Chỉnh hóa bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt với nhiễu trắng



trong đó, ** là miền bị chặn với biên đủ trơn, ** thỏa mãn ** là toán tử Laplacian âm, **là quá trình Wiener (hay còn gọi là chuyển động Brown thông thường) nhận giá trị trên ,  được gọi là nhiễu trắng, các hàm ** thỏa mãn một số giả thiết cho trước.

Kết quả chính của mục này bao gồm: chỉ ra tính không ổn định của nghiệm, dẫn đến tính không chỉnh của bài toán; xây dựng nghiệm chỉnh hóa và đánh giá   
sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác.

* Mục 4.2: Bài toán ngược thời gian cho phương trình bi-parabolic với nhiễu trắng và nhiễu Brown phân thứ
  + Bài toán với nhiễu trắng



* + Bài toán với nhiễu Brown phân thứ



với **là chuyển động Brown phân thứ nhận giá trị trên   được gọi là nhiễu Brown phân thứ.

Trong đó, các hàm  thỏa mãn một số giả thiết cho trước.

Kết quả chính của mục này bao gồm: thiết lập tính tồn tại nghiệm cho từng bài toán với dữ liệu đủ trơn; chỉ ra tính không chỉnh của mỗi bài toán; xây dựng nghiệm chỉnh hóa và chứng minh nghiệm chỉnh hóa hội tụ về nghiệm chính xác.

* Mục 4.3: Bài toán ngược thời gian cho phương trình giả parabolic với nhiễu trắng và nhiễu Brown phân thứ
  + Bài toán với nhiễu trắng



* + Bài toán với nhiễu Brown phân thứ



Trong đó, , các hàm ** thỏa mãn một số giả thiết cho trước. Khác với Mục 4.3, bên cạnh trường hợp  mục này còn xét thêm trường hợp . Đây là trường hợp khó xử lý hơn do sự phức tạp của công thức nghiệm và sự xuất hiện của nhiều nhân kỳ dị.

Kết quả chính của mục này bao gồm: khảo sát tính chỉnh của các bài toán trong trường hợp **chỉ ra tính không chỉnh và đưa ra kết quả chỉnh hóa cho từng bài toán trong trường hợp**

* Mục 4.4: Bài toán ngược thời gian cho phương trình khuếch tán phi tuyến với đạo hàm cấp không nguyên và nhiễu ngẫu nhiên
  + Bài toán với nhiễu trắng



* + Bài toán với nhiễu Brown phân thứ



với 

Trong đó, toán tử, với  là đạo hàm Riemann-Liouville, các hàm ** thỏa mãn một số giả thiết cho trước.

Kết quả chính của mục này bao gồm: thiết lập tính tồn tại, duy nhất, và chính quy hóa của nghiệm cho các bài toán với dữ liệu đủ trơn; chỉ ra tính không chỉnh và đưa ra kết quả chỉnh hóa cho từng bài toán.

# NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN:

Luận án này chứa nhiều kết quả mới, được công bố trên các tạp chí khoa học uy tín. Cụ thể, các kết quả mới gồm có

* + Khảo sát các bài toán ngược thời gian cho các phương trình khuếch tán ở dạng ngẫu nhiên (thay vì tất định). Như đã biết, trong các thập kỷ gần đây, các bài toán ngược thời gian cho các phương trình khuếch tán ở dạng tất định được quan tâm nghiên cứu nhiều đáng kể. Tuy nhiên, đối với trường hợp ngẫu nhiên, các kết quả vẫn còn hạn chế.
  + Bên cạnh việc chỉ ra tính không chỉnh và chỉnh hóa các bài toán ngược thời gian, tính tồn tại, duy nhất, và chính quy hóa của nghiệm cũng được thiết lập với các điều kiện đủ trơn cho dữ liệu.
  + Bên cạnh trường hợp nhiễu ngẫu nhiên ở dạng Brown thông thường, luận án còn khảo sát trường hợp nhiễu ở dạng tổng quát (nhiễu Brown phân thứ). Theo chúng tôi được biết, các kết quả về loại nhiễu này, đặc biệt là trường hợp  vẫn còn rất ít.

# CÁC ỨNG DỤNG/KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU:

Trong tương lai, chúng tôi có thể mở rộng nghiên cứu theo các hướng sau

* + Hướng 1: Khảo sát tính chỉnh / không chỉnh của các bài toán cho các phương trình đạo hàm riêng ngẫu nhiên với điều kiện phi địa phương thay vì điều kiện đầu hay điều kiện cuối.
  + Hướng 2: Khảo sát tính tồn tại, duy nhất, tính chính quy hóa nghiệm của các bài toán cho các phương trình ngẫu nhiên ở dạng delay, trong đó nghiệm của bài toán không chỉ phụ thuộc vào giá trị của nó tại thời điểm đầu () mà còn phụ thuộc vào các giá trị tại các thời điểm trong quá khứ (**).
  + Hướng 3: Khảo sát các tính chất của nghiệm cho các phương trình đạo hàm riêng với nhiễu ngẫu nhiên ở dạng colored noise hay các loại nhiễu ngẫu nhiên khác.
  + Hướng 4: Mở rộng kết quả lên trường hợp miền không gian là miền nhiều chiều không bị chặn.

# TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN NGHIÊN CỨU SINH

**PGS.TS. Nguyễn Huy Tuấn Trần Ngọc Thạch**

# TS. Nguyễn Minh Quân

**XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO**

**HIỆU TRƯỞNG**

THESIS INFORMATION

Thesis title: **Some diffusion equations with stochastic noise**

Speciality: Mathematical Analysis

Code: 9460102

Name of PhD Student: **TRAN NGOC THACH**

Academic year: 2020

Supervisor: **Associate Professor NGUYEN HUY TUAN, Doctor NGUYEN MINH QUAN**

At: VNUHCM - University of Science

# SUMMARY:

Results of this thesis have been combined from four papers published on Journal of Inverse and Ill-posed Problems, Asymptotic Analysis, Stochastics and Dynamics, Bulletin des Sciences Mathématiques, including four sections (in Chapter 4) as follows.

* Section 4.1: Regularization of the backward problem for heat equations  
  driven by white noise



where ** is a bounded domain with sufficiently smooth boundary, ** satisfies **  is the negative Laplacian operator,** is a Wiener process (or called standard Brownian motion) taken value on ,  is called white noise, the functions ** satisfy some given assumptions.

The main results here are: showing the instability of the solution, leading to the ill-posedness of the problem; constructing the regularized solution and estimate the error between the regularized solution and the exact one.

* Section 4.2: The backward problem for bi-parabolic equations driven by white noise and fractional Brownian noise
  + Problem with white noise



* + Problem with fractional Brownian noise



where ** is a fractional Brownian motion taken value on  is called fractional Brownian noise.

Here,  the functions  satisfy some given assumptions.

The main results here are: constructing the existence for the solution of each problem under sufficiently smooth conditions of the data; showing the ill-posedness of each problem; establishing regularized solutions and describing the convergence results.

* Section 4.3: The backward problem for pseudo parabolic equations driven by white noise and fractional Brownian noise
  + Problem with white noise



* + Problem with fractional Brownian noise



Here, , the functions ** satisfy some given assumptions. Compared with Section 4.3, beside the case , the additional case  is considered, which is more difficult to deal with due to the complexity of the solution and the appearance of singular kernels.

The main results here are: investigating the well-posedness of the two problems when ** showing the ill-posedness and giving the regularization results for the two problems when **

* Section 4.4: The backward problem for nonlinear fractional diffusion equations driven by white noise and fractional Brownian noise
  + Problem with white noise



* + Problem with fractional Brownian noise



where 

Here, the operator , with  is the Riemann-Liouville derivative, the functions ** satisfy some given assumptions.

The main results here are: constructing the existence, uniqueness, and regularity of the solution under sufficiently smooth assumptions for the data; showing the ill-posedness and giving the regularization results for the two problems.

# NOVELTY OF THESIS:

This thesis contains some new results, which have been published on prestigious scientific journals. The novelties are as follows

* + Investigating backward problems for diffusion equations in the stochastic case (instead of the deterministic one). As we know, in recent decades, backward problems for diffusion equations in the deterministic case have been studied significantly. However, for the stochastic case, the literature is still limited.
  + Beside showing the ill-posedness and constructing regularization results, the existence, uniqueness, and regularity of the solution are investigated under sufficiently smooth assumptions for the data.
  + Beside the standard Brownian motion, the noise in the form of fractional, Brownian motion is considered. As we known, the results on this noise, especially when , are limited.

# APPLICATIONS/APPLICABILITY/PERSPECTIVE:

In the future, we could expand our research direction as follows

* + Topic 1: Investigating the well-posedness / ill-posedness for distinct problems of partial differential equations with non-local conditions instead of the initial (or final) condition.
  + Topic 2: Investigating the existence, uniqueness, regularity for problems of delay equations, where the solutions depend not only on the initialstatus () but also the previous behaviors (**).
  + Topic 3: Investigating behaviors of the solutions to partial differential equations with the stochastic noise in the form of colored noise or different types.
  + Topic 4: Expanding the results into the case when the space domain is multi-dimensional and unbounded.

# SUPERVISOR PhD STUDENT

**Assoc. Prof. Nguyen Huy Tuan Tran Ngoc Thach**

# Dr. Nguyen Minh Quan

**CERTIFICATION**

**UNIVERSITY OF SCIENCE**

**PRESIDENT**