TRANG THÔNG TIN LUẬN ÁN

Tền đề tài luận án: Một số bài toán Cauchy cho phương trình với đạo hàm Caputo và Riemann Liouville  
Ngành: Toán giải tích  
Mã số Ngành: 9460102  
Họ tên nghiên cứu sinh: NGUYỄN HOÀNG LỰC  
Khóa đào tạo: 2020  
Người hướng dẫn khoa học: PGS. TS. NGUYỄN HUY TUẤN  
Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG.HCM

1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN ÁN:  
   Kết quả của luận án này được tổng hợp từ 4 bài báo đã được công bố trên các tạp chí: Mathematical Methods in the Applied Sciences, Journal of Fixed Point Theory and Applications, Advances in Continuous and Discrete Models: Theory and Modern Applications (Tên cũ: Advances in Difference Equations). Các kết quả này được chia thành 4 phần chính như sau.

* Phần 1: Bài toán phi địa phương cho phương trình Rayleigh-Stokes Xét phương trình Rayleigh-Stokes như sau:  
  với điều kiện phi địa phương  
   là đạo hàm Riemann-Liouville bậc   
  với (.) là hàm Gamma.  
  Trong phần này, chúng tôi xem xét phương trình Rayleigh-Stokes phi tuyến với các điều kiện phi địa phương. Sự tồn tại, tính duy nhất và tính chính quy của nghiệm nhẹ của bài toán được nghiên cứu trong một số không gian. Khi tham số tiến về không, chúng tôi nghiên cứu thêm sự hội tụ của nghiệm nhẹ.
* Phần 2: Bài toán giá trị ban đầu cho phương trình Rayleigh-Stokes phi tuyến.  
  Xét phương trình Rayleigh-Stokes như sau:  
  Với là toán tử Laplace, là miền bị chặn có biên trơn , và là thời gian cho trước, là số thực dương. là dữ liệu ban đầu, là đạo hàm cấp phân số Riemann-Liouville bậc được định nghĩa như sau:  
  với .  
  Trong phần này, bài toán giá trị ban đầu cho phương trình Rayleigh-Stokes phi tuyến được nghiên cứu trong hai trường hợp, cụ thể là với hàm nguồn Lipschitz toàn cục và hàm nguồn Lipschitz địa phương. Nhờ vào phép phân tích phổ, nguyên lý điểm bất động, và một số không gian hàm thích hợp, chúng tôi thiết lập nghiệm chỉnh toàn cục cho bài toán. Hơn nữa, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại toàn cục nghiệm nhẹ và tính bùng nổ của của nó.
* Phần 3: Bài toán Rayleigh-Stokes phi tuyến với điều kiện tích phân phi địa phương.
* Xét bài toán Rayleigh-Stokes như sau:  
  với điều kiện tích phân phi địa phương  
  với , và . Ở đây là vận tốc chất lưu, là tính nhớt, là hàm nguồn, là toán tử Laplace, là miền bị chặn có biên trơn , và là thời gian cho trước, là dữ liệu cuối thuôc , , và là đạo hàm cấp phân số Riemann-Liouville bậc được định nghĩa như sau:  
  với .  
  Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất cho nghiệm nhẹ của bài toán cho phương trình Rayleigh-Stokes với điều kiện tích phân phi địa phương. Tính không chỉnh cho nghiệm nhẹ của bài toán giá trị ban đầu cũng được nghiên cứu trong phần này. Để chỉnh hóa nghiệm không chỉnh này, bằng phương pháp chặt cụt Fourier, chúng tôi đưa ra nghiệm chỉnh hóa cho bài toán, và khảo sát sự hội tụ của nghiệm chỉnh hóa này.
* Phần 4: Bài toán thuận cho phương trình giả Parabolic với đạo hàm puto.  
  Xét phương trình đạo hàm riêng cấp không nguyên như sau:  
  trong đó là đạo hàm Caputo bậc , được định nghĩa như sau:

trong đó là hàm Gamma.  
Trong phần này, chúng tôi xem xét phương trình giả parabolic với đạo hàm Caputo. Chúng tôi nghiên cứu tính tồn tại và tính duy nhất của nghiệm nhẹ. Trường hợp bài toán phi tuyến, chúng tôi khảo sát tính chất nghiệm toàn cục với dữ liệu đầu . Trong trường hợp dữ liệu đầu , chúng tôi khảo sát kết quả tồn tại địa phương. Công cụ chính chúng tôi sử dụng ở đây là các công cơ bản, định lí điểm bất động Banach và định lí nhúng Sobolev.

2. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN:

Nội dung chính của luận án này được tổng hợp từ các công trình đã được đăng trên các tạp chí uy tín trên thế giới, có nhiều kết quả mới hơn những kết quả trước đó. Trong luận án này, các kết quả mới của chúng tôi có thể liệt kê như sau.

* Với phương trình Rayleigh-Stokes phi tuyến cùng các điều kiện phi địa phương, chúng tôi chỉ ra tính duy nhất và tính chính quy của nghiệm nhẹ của bài toán được trong một số không gian. Bên cạnh đó, chúng tôi nghiên cứu thêm sự hội tụ của nghiệm nhẹ khi các tham số tiến về không.
* Phương trình Rayleigh-Stokes phi tuyến được chúng tôi nghiên cứu trong hai trường hợp: hàm nguồn Lipschitz toàn cục và hàm nguồn Lipschitz địa phương. Chúng tôi thiết lập nghiệm chỉnh toàn cục cho bài toán. Hơn nữa, chúng tôi chứng minh được sự tồn tại toàn cục nghiệm nhẹ và tính bùng nổ của của nó.
* Sự tồn tại và duy nhất cho nghiệm nhẹ của bài toán cho phương trình Rayleigh-Stokes với điều kiện tích phân phi địa phương đã được chúng tôi nghiên cứu. Tính không chỉnh cho nghiệm nhẹ của bài toán giá trị ban đầu cũng được nghiên cứu trong phần này, chúng tôi cũng đã đưa ra nghiệm chỉnh hóa cho bài toán, và khảo sát sự hội tụ của nghiệm chỉnh hóa này.
* Với phương trình giả parabolic với đạo hàm Caputo. Sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm nhẹ của bài toán đã được chúng tôi nghiên cứu. Trường hợp bài toán phi tuyến, chúng tôi khảo sát tính chất nghiệm toàn cục với dữ liệu đầu . Trong trường hợp dữ liệu đầu , chúng tôi khảo sát kết quả tồn tại địa phương.

1. CÁC ỨNG DỤNG/KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU:  
   Trong tương lai, chúng tôi sẽ mở rộng nghiên cứu theo các hướng sau

* Hướng 1: Khảo sát sự tồn tại, tính chính qui, sự tồn tại nghiệm cổ điển, tính tắt dần, tính phân rã, tính bùng nổ... của nghiệm cho các bài toán giá trị biên/giá trị đầu/giá trị cuối/điều kiện phi địa phương với các đạo hàm cấp không nguyên theo cả biến thời gian và không gian..
* Hướng 2: Nghiên cứu phương pháp số cho các bài toán với đạo hàm cấp không nguyên.

Hướng 3: Nghiên cứu các các phương trình vi phân - đạo hàm riêng ngẫu nhiên với các đạo hàm không nguyên kết hợp với các chủ đề trên.

TẬP THỂ CÁN BỘ HƯỚNG DẪN NGHIÊN CỨU SINH

* 1. XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO  
     HIẸU TRƯỞNG

THESIS INFORMATION

Thesis title: Some Cauchy problems for equations with Caputo and Riemann-Liouville derivatives  
Speciality: Mathematical Analysis  
Code: 9460102  
Name of PhD Student: NGUYEN HOANG LUC  
Academic year: 2020  
Supervisor: Associate Professor NGUYEN HUY TUAN  
At: VNUHCM - University of Science

1. SUMMARY:  
   The primary findings of this thesis are derived from a synthesis of four journal publications: Mathematical Methods in the Applied Sciences, Journal of Fixed Point Theory and Applications, Advances in Continuous and Discrete Models: Theory and Modern Applications (Previous name: Advances in Difference Equations). These results are divided into the four parts listed below.

* Part 1: On the initial value problem for the nonlinear fractional Rayleigh-Stokes equation

We consider the Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with the time fractional derivative  
with the non-local condition

Here is the Laplacian, is a smooth domain with the boundary , and is a given time, is the final data in , and is the Riemann-Liouville fractional derivative of order defined as follows:  
where .  
In this part, we study a fractional nonlinear Rayleigh-Stokes problem with nonlocal conditions. Existence, uniqueness, and regularity of the mild solution of the problem are investigated in some appropriate spaces. Furthermore, when the parameter goes to zero, we consider the convergence of the mild solution. Our analysis relies on Banach's fixed point theorem.  
- Part 2: On a nonlinear fractional Rayleigh-Stokes equation associated with nonlocal conditions

We consider the Rayleigh-Stokes problem with regard to the time-fractional derivative and a nonlinear source term as follows:  
Here is the Laplacian, is a bounded domain with smooth boundary , and is a given time. The real constant is positive, is the initial data in , the notation is the Riemann-Liouville fractional derivative of order defined as follows:  
where .  
In this part, an initial-boundary value problem for the nonlinear fractional Rayleigh-Stokes equation is studied in two cases, namely when the source term is globally Lipschitz or locally Lipschitz. The time-fractional derivative used in this work is the classical Riemann-Liouville derivative. Thanks to the spectral decomposition, a fixed point argument, and some useful function spaces, we establish global well-posed results for our problem. Furthermore, we demonstrate that the mild solution exists globally or blows up in finite time.

* Part 3: A nonlinear fractional Rayleigh-Stokes equation under non-local integral conditions  
  We focus on the Rayleigh-Stokes problem as follows:  
  associated with the non-local integral condition  
  where , and . Here is fluid velocity, is viscosity, is a source function, is the Laplacian, is a smooth domain with the boundary , and is a given time, is the final data in , and is the Riemann-Liouville fractional derivative of order defined as follows:  
  where .  
  In this part, we study on the fractional nonlinear Rayleigh-Stokes equation under non-local integral conditions, in which the existence and the uniqueness of the mild solution to our problem are considered. The ill-posed-ness of the mild solution to the problem recovering the initial value is also investigated. To tackle the illposed-ness, a regularized solution is constructed by Fourier truncation method, and the convergence rate to the exact solution of this method is demonstrated.
* Part 4: On an initial value problem for time fractional pseudo-parabolic equation with Caputo derivative  
  We consider the following time fractional PDE as follows:  
  where is Caputo fractional derivative operator of order defined as follows:  
  where is the Gamma function and is the first order integer derivative of function with respect to independent variable .

In this part, we consider a pseudo-parabolic equation with the Caputo fractional derivative. We study the existence and uniqueness of a class of mild solutions of these equations. For a nonlinear problem, we first investigate the global solution under the initial data . In the case of initial data , we obtain the local existence result. Our main tool here is using fundamental tools, namely Banach fixed point theorem and Sobolev embeddings.  
2. NOVELTY OF THESIS:  
The main content of this dissertation is a synthesis of papers that have been published in prestigious publications around the world, with more new findings than old previous ones. The following is a summary of our new findings in this thesis.

* With regard to a non-linear Rayleigh-Stokes equation associated non-local conditions, we presented the uniqueness and regularity of the mild solution to the problem in some proper spaces. Furthermore, we investigated the convergence of the mild solution when the parameters approach to zero.
* A non-linear Rayleigh-Stokes equation was considered in two cases: the source term is globally Lipschitz and locally Lipschitz. We put forward global well-posed results for the problem and interpreted that the mild solution exists globally or blow up in finite time.
* The existence and uniqueness of the mild solution to a Rayleigh-Stokes equation accompanied by non-local integral was considered. The illposed-ness of the mild solution to the direct problem was also introduced. In addition, we established the regularized solution to the problem, and presented the interpretation for the convergence rate of the mild solution.
* With respect to a pseudo-parabolic equation with Caputo derivative, we gave an introduction to results of the existence and uniqueness of the mild solution of the problem. In the case of the source term is non-linear, we investigated the global solution with the initial data . With regard to the case of initial data , we presented the local existence result.

1. APPLICATIONS/APPLICABILITY/PERSPECTIVE:  
   In the near future, we will expand our research to include the subsequent topics:

* Topic 1: Investigating the existence, regularity, the existence of classical solution, and decay, blow up, asymptotic behaviors properties... of the solution for boundary value problems/ initial value problems/final value problems/problems with nonlocal. condition containing both space-time fractional derivatives.
* Topic 2: Considering numerical methods for problems associated with fractional derivative.
* Topic 3: Examining stochastic differential equations/stochastic partial differential equations associated with topics above.

SUPERVISOR PhD STUDENT

* 1. CERTIFICATION  
     UNIVERSITY OF SCIENCE  
     PRESIDENT