**TRANG THÔNG TIN VỀ LUẬN ÁN**

Tên đề tài luận án: Hồi qui chuỗi lượng giác và một số ứng dụng

Ngành/ Chuyên ngành: Toán/ Lý thuyết xác suất và thống kê toán học

Mã số: 62 46 01 06

Họ tên nghiên cứu sinh: Nguyễn Đăng Minh

Khóa đào tạo: 9/2015-9/2020

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS. Đặng Đức Trọng

Cơ sở đào tạo: Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên- ĐHQG.HCM

1. TÓM TẮT NỘI DUNG LUẬN ÁN:

Trong luận án, chúng tôi đã nghiên cứu các vấn đề sau:

*Vấn đề 1.* Xét bài toán hồi qui $Y\_{j}=f(X\_{j})+ε\_{j},j=\overbar{1,n}$ trong trường hợp $X\_{j}\in I⊂R^{d}, d\geq 2$. Xây dựng ước lượng chuỗi trực giao trong trường hợp tổng quát này, khảo sát tính vững và tốc độ hội tụ của ước lượng đề xuất.

*Vấn đề 2.* Cho $Ω=(0,b)×(0,π)⊂R^{2}$, ta xét bài toán Helmholtz cải biên: tìm hàm biên độ sóng $u(x,y)$thỏa

$$\frac{∂^{2}u}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}u}{∂y^{2}}=ku, (x,y)\in Ω, k\in R$$

với điều kiện biên

$$u\_{x}(0,y)=u\_{x}(π,y)=u\_{y}(x,0)=0, 0\leq x\leq π, 0\leq y\leq b,$$

và bộ dữ liệu quan trắc thỏa mô hình hồi qui

$$Y\_{j}=f(X\_{j})+ε\_{j},j=\overbar{1,n}$$

với $X\_{j}$ là tọa độ đo thiết kế tất định.

*Vấn đề 3.* Xét $Ω=(0,π)×(0,π)⊂R^{2},T>0$ và hàm số $a:(0,T)⟶R^{+}$ đo được Lebesgue thỏa mãn điều kiện elliptic đều, tức là tồn tại hai hằng số thực dương $a\_{1},a\_{2}$ thỏa $a\_{1}\leq a(t)\leq a\_{2},∀t\in (0,T)$. . Xét bài toán tìm nhiệt độ đầu $θ(x,y):=u(x,y,0)$khi biết trước hàm nguồn $f(x,y)$ và nhiệt độ cuối h(x,y) thỏa mãn phương trình

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{t}-a(t)∆u=f(x,y,t), (x,y,t)\in Ω×(0,T),\\u(x,y,T)=h(x,y), (x,y)\in Ω,\end{array}\right.$$

thỏa điều kiện Dirichlet

$$\left.u\right|\_{∂Ω}=0$$

với $∂Ω$ là biên của miền $Ω$, toán tử Laplace $Δu=\frac{∂^{2}u}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}u}{∂y^{2}}$. Nhiệt độ cuối và nguồn nhiệt thỏa mô hình hồi qui: với điểm thiết kế đo $(X\_{i},Y\_{j})\in Ω$ tất định, $g\_{ij}(t)$ và $Z\_{ij}$ là những giá trị quan trắc của $f,h$ thỏa mô hình

$$g\_{ij}(t)=f(X\_{i},Y\_{j},t)+ϑξ\_{ij}(t), Z\_{ij}=h(X\_{i},Y\_{j})+σ\_{ij}ε\_{ij}$$

trong đó $ξ\_{ij}(t)$ là chuyển động Brown, $ε\_{ij}$ là những biến ngẫu nhiên độc lập với trung bình 0, phương sai bằng 1 và bậc nhiễu $σ\_{ij}$ bị chặn bởi hằng số dương $V\_{max}$ , nghĩa là $0<σ\_{ij}\leq V\_{max}$,$∀i,j$ và $ϑ$ là một hằng số dương nhỏ. Những biến ngẫu nhiên $ξ\_{ij}(t)$ và $ε\_{ij}$ là đôi một độc lập. Trong mô hình này, những giá trị quan trắc $g\_{ij}(t)$ và $Z\_{ij}$ biết trước do đo đạc trong khi biên độ nhiễu ngẫu nhiên $ξ\_{ij}(t)$ và $ε\_{ij}$ không biết trước.

1. NHỮNG KẾT QUẢ MỚI CỦA LUẬN ÁN:

Trong nội dung đã trình bày trong luận án, chúng tôi đã nghiên cứu:

1. Ứng dụng ước lượng chiếu để xây dựng ước lượng sóng, ước lượng nhiệt lần lượt cho hai bài toán Helmholtz và nhiệt ngược hai chiều.
2. Tương ứng với mỗi ước lượng trên, chúng tôi đã sử dụng bất đẳng thức van Trees để tìm chặn dưới và chứng minh ước lượng đề xuất đạt tốc độ hội tụ tối ưu.
3. Trong trường hợp bài toán Helmholtz một chiều, chúng tôi đã xây dựng một xấp xỉ tiệm cận khoảng tin cậy cho trường sóng khi mẫu ngẫu nhiên nhiều độc lập cùng phân phối.
4. Thực hiện mô phỏng số cho hai bài toán được nghiên cứu ở trên.
5. CÁC ỨNG DỤNG/ KHẢ NĂNG ỨNG DỤNG TRONG THỰC TIỄN HAY NHỮNG VẤN ĐỀ CÒN BỎ NGỎ CẦN TIẾP TỤC NGHIÊN CỨU

Từ những kết quả đã đạt được, chúng tôi sẽ hướng tới nghiên cứu những vấn đề mở và hóc búa hơn như sau:

1. Xây dựng ước lượng chiếu cho những bài phương trình toán lý phi tuyến, ví dụ như phương trình nhiệt, phương trình sóng và phương trình elliptic phi tuyến với đạo hàm bậc nguyên và không nguyên, với dữ liệu ngẫu nhiên.
2. Khảo sát các bài toán trên trong trường hợp phương trình có nhiễu trắng.
3. Nghiên cứu áp dụng các phương pháp chọn tham số trơn (tham số chỉnh hoá) thích nghi với dữ liệu (adaptive estimation) theo các phương pháp Lepskii, phương pháp hàm phạt (penalty function methods) và phương pháp CV (cross validation method) cho những phương trình toán lý đặt không chỉnh.

|  |  |
| --- | --- |
| **CÁN BỘ HƯỚNG DẪN** | **NGHIÊN CỨU SINH**(Ký tên, họ tên) |

**XÁC NHẬN CỦA CƠ SỞ ĐÀO TẠO**

**PHÓ HIỆU TRƯỞNG**

 **Trần Lê Quan**

**THESIS INFORMATION**

Thesis title: Trigonometric Series Regression and Applications

Speciality: [Probability and Statistics](https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_and_statistics)

Code: 62 46 01 06

PhD Student: Nguyen Dang Minh

Academic year: 9/2015-9/2020

Supervisor: Professor Dang Duc Trong

At: UNIVERSITY OF SCIENCE – VNU.HCMC

1. SUMMARY OF THESIS CONTENTS:

In this thesis, we study the problems:

*Problem 1.* We consider the regression problem of finding a function $f:R^{d}⟶R$ such that$Y\_{j}=f(X\_{j})+ε\_{j},j=\overbar{1,n}$ in case $X\_{j}\in I⊂R^{d}, d\geq 2$. In this thesis, we construct orthogonal series estimates in this general case, we investigate the consistency and the minimax property of the estimator.

*Problem 2.* Let $Ω=(0,b)×(0,π)⊂R^{2}$, we deal with the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation: find the amplitude of wave propagation $u(x,y)$ such that

$$\frac{∂^{2}u}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}u}{∂y^{2}}=ku, (x,y)\in Ω, k\in R$$

with a part of the boundary of the domain is soundproof, i.e.

$$u\_{x}(0,y)=u\_{x}(π,y)=u\_{y}(x,0)=0, 0\leq x\leq π, 0\leq y\leq b,$$

and  in which the function  has observations with error

$$Y\_{j}=f(X\_{j})+ε\_{j},j=\overbar{1,n}$$

where the points $X\_{j}$ are deterministic design points. We use the expansion in Problem 1 to study Problem 2. The thesis establishes the one-dimensional trigonometric estimator and the consistency, the minimax property of the estimator.

*Problem 3.* Let $Ω=(0,π)×(0,π)⊂R^{2},T>0$ and $a:(0,T)⟶R^{+}$ be a Lebesgue measurable function satisfying the uniform ellipticity condition 0<$a\_{1}\leq a(t)\leq a\_{2},∀t\in (0,T)$. We find a function $θ(x,y):=u(x,y,0)$ such that

$$\left\{\begin{array}{c}u\_{t}-a(t)∆u=f(x,y,t), (x,y,t)\in Ω×(0,T),\\u(x,y,T)=h(x,y), (x,y)\in Ω,\end{array}\right.$$

subject to the Dirichlet boundary condition

$$\left.u\right|\_{∂Ω}=0$$

where $∂Ω$ is the boundary of domain $Ω$, the Laplace operator $Δu=\frac{∂^{2}u}{∂x^{2}}+\frac{∂^{2}u}{∂y^{2}}$. Let $g\_{ij}(t)$ and $Z\_{ij}$ be the observed data of $f,h$ and let $(X\_{i},Y\_{j})\in Ω$ be deterministic grid points. We consider two models

$$g\_{ij}(t)=f(X\_{i},Y\_{j},t)+ϑξ\_{ij}(t), Z\_{ij}=h(X\_{i},Y\_{j})+σ\_{ij}ε\_{ij}$$

where $ξ\_{ij}(t)$ are a Brownian motion, $ε\_{ij}\~N\left(0,1\right)$and $σ\_{ij}$ are bounded by a positive constant $V\_{max}$, i.e. $0<σ\_{ij}\leq V\_{max}$,$∀i,j$. The random variables $ξ\_{ij}(t)$ and $ε\_{ij}$ are mutually independent. Note that, the stochastic processes $ξ\_{ij}(t)$ and the random variables $Z\_{ij}$ are observable whereas $ϑξ\_{ij}(t)$ and $σ\_{ij}ε\_{ij}$ are unknown. The thesis establishes the two-dimensional trigonometric estimator and the consistency, the minimax of the estimator.

1. NEW RESULTS OF THE THESIS:

The content of the thesis :

1. Applying the trigonometric projection estimator to construct the wave field of the modified Helmholtz equation and the temperature distribution of two dimension backward heat equation.
2. Corresponding to each of the mentioned estimators, we used the van Trees inequality to find the lower bound and proved the proposed estimators is minimax.
3. For the modified Helmholtz equation, in i.i.d. model, we construct an asymptotic confident interval for the solution of the problem.
4. APPLICATIONS/POSSIBILITIES OF APPLICATION IN PRACTICE OR QUESTION ISSUES TO CONTINUE THE RESEARCH

From the achieved results, we will aim to study more open and difficult issues as follows:

1. Application of projection estimator for nonlinear problems, fractional partial differential equations with statistical discrete data.
2. Examine the above problems in the case of stochastic differential equations.
3. Applying the Lepskii methods, penalty function methods and cross validation method to establish some adaptive results for inverse problems in partial differential equations.

|  |  |
| --- | --- |
| **SUPERVISOR** | **PhD STUDENT** |

 CONFIRMATION OF THE UNIVERSITY OF SCIENCE

VICE PRESIDENT

**Tran Le Quan**