

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

TRƯỜNG HỮU DŨNG

**CÁC NHÓM CON NHÂN THỎA MỘT SỐ  
ĐIỀU KIỆN HỮU HẠN TRONG VÀNH CHIA**

Ngành: Đại số và Lý thuyết số

Mã số ngành: 62460104

**TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

Thành phố Hồ Chí Minh - 2019

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học  
Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn khoa học: **GS. TS. BÙI XUÂN HẢI**

Phản biện 1: **PGS. TS. NGUYỄN SUM**

Phản biện 2: **TS. BÀNH ĐỨC DŨNG**

Phản biện 3: **TS. NGUYỄN PHÚC SƠN**

Phản biện độc lập 1: **PGS. TS. TRƯƠNG CÔNG QUỲNH**

Phản biện độc lập 2: **TS. BÀNH ĐỨC DŨNG**

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp Cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM, vào lúc ..... giờ ..... ngày ..... tháng ..... năm .....

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

1. Thư viện Tổng hợp Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh
2. Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

# Mục lục

<b>Đặc điểm chung của Luận án</b>	<b>2</b>
1 Tính cấp thiết . . . . .	2
2 Mục tiêu . . . . .	2
3 Phương pháp nghiên cứu . . . . .	3
4 Kết quả mới . . . . .	3
5 Ý nghĩa khoa học và thực tiễn . . . . .	3
6 Báo cáo kết quả đạt được . . . . .	4
7 Công bố . . . . .	5
<b>Nội dung Luận án</b>	<b>6</b>
<b>Kết luận của luận án</b>	<b>9</b>
<b>Đề xuất của luận án</b>	<b>11</b>
<b>Danh mục các công trình của tác giả</b>	<b>13</b>
<b>Tài liệu tham khảo</b>	<b>14</b>

# Đặc điểm chung của Luận án

## 1 Tính cấp thiết

Cấu trúc vành chia và các nhóm con trong vành chia cũng như nhóm tuyến tính trên vành chia là các vấn đề thời sự nhận được nhiều sự quan tâm nghiên cứu. Các nhóm con chuẩn tắc, á chuẩn tắc và nhóm con tối đại trong vành chia được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước bắt đầu nghiên cứu từ hơn 50 năm trước cho đến nay [2, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 16–20, 25, 26, 28, 29, 31]. Theo B. Hartley [21], nhóm con  $H$  của nhóm  $K$  được gọi là *gần á chuẩn tắc* trong  $K$  nếu tồn tại một họ các nhóm con  $H = H_r \leq H_{r-1} \leq \dots \leq H_1 = K$  của  $K$  sao cho với mỗi  $1 < i \leq r$ , hoặc  $H_i$  chuẩn tắc trong  $H_{i-1}$  hoặc  $H_i$  có chỉ số hữu hạn trong  $H_{i-1}$ . Nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính trên trường đã được nghiên cứu trong [30]. Gần đây, có một số nghiên cứu về các nhóm con gần á chuẩn tắc trong vành chia và trong nhóm tuyến tính trên vành chia [5, 7, 8, 11, 15, 27]. Trong luận án, chúng tôi trình bày các kết quả nghiên cứu của chúng tôi về nhóm con gần á chuẩn tắc trong vành chia nói riêng và trong nhóm tuyến tính trên vành chia nói chung. Các kết quả này đã được chúng tôi công bố trên các tạp chí quốc tế [7, 8, 11].

## 2 Mục tiêu

Chúng tôi nghiên cứu điều kiện để một nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân của vành chia nằm trong tâm của vành chia. Đồng thời, chúng tôi cũng nghiên cứu ảnh hưởng của các nhóm con gần á chuẩn tắc đối với cấu trúc vành chia.

### 3 Phương pháp nghiên cứu

Chúng tôi sử dụng những phương pháp của Lý thuyết nhóm kết hợp với những phương pháp của Lý thuyết vành. Nói riêng, chúng tôi sử dụng những phương pháp của Lý thuyết nhóm tuyến tính. Từ việc nghiên cứu cấu trúc nhóm nhân của vành chia chúng tôi suy ra tính chất của vành chia.

### 4 Kết quả mới

Những kết quả mới chính nhận được:

1. Mọi nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương và đại số trên tâm trong một vành chia đều nằm trong tâm.
2. Giả sử  $D$  là một vành chia đại số trên tâm  $F$  vô hạn không đếm được và  $D$  vô hạn chiều trên  $F$ . Khi đó, mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát trên  $D$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent suy rộng đều nằm trong  $F$ .
3. Mọi vành chia có nhóm nhân chứa một nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ suy rộng khác không đều hữu hạn tâm.

### 5 Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Kết quả thứ nhất mở rộng một kết quả của B. X. Hải và N. V. Thìn trong [18]. Kết quả thứ hai tổng quát hóa kết quả của L. Makar-Limanov [26] trong trường hợp tâm của vành chia là một tập hợp vô hạn không đếm được. Kết quả thứ ba tổng quát kết quả của K. Chiba trong [4]. Từ kết quả này, có thể thu được các kết quả có trước như của N. Jacobson (1945) [22], M. Mahdavi-Hezavehi et al. (1995) [24], S. Akbari et al. (1998) [1], M. A. Chebotar et al. (2004) [3].

Kết quả thứ nhất được đăng online trên tạp chí *International Journal of Group Theory* (ESCI, Scopus, Q4). Kết quả thứ hai được đăng trên tạp chí *International Electronic Journal of Algebra* (ESCI, Scopus, Q3). Kết quả thứ ba được gửi phản biện

tại tạp chí thuộc danh mục SCIE.

## 6 Báo cáo kết quả đạt được

Các kết quả chính của luận án đã được thảo luận tại những hội nghị, hội thảo trong và ngoài nước sau đây:

1. Các buổi seminar chuyên đề tại Bộ môn Đại số, Khoa Toán - Tin học, trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh.
2. Hội nghị Đại số - Hình học - Topô, Tuần Châu, Hạ Long 18-21/12/2014.
3. Hội nghị Đại số - Hình học - Topô, Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk 26-30/10/2016.
4. Hội nghị Khoa học lần X, trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh 11/11/2016.
5. Hội thảo Đại số - Lý thuyết số và ứng dụng, Trường Đại học Phú Yên, tỉnh Phú Yên, 10/4/2017.
6. International Conference on Algebra and Geometry ICAG 2017, May 31 – June 01, 2017, Bang-plad, Bangkok, Thailand.
7. Hội nghị Toán học Miền Trung Tây Nguyên lần thứ 2, Trường Đại học Đà Lạt, Đà Lạt, Lâm Đồng, 09–11/12/2017.
8. Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX, Nha Trang, 14–18/08/2018.
9. Hội nghị Khoa học lần XI, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh 09/11/2018.
10. The Asia-Australia Algebra Conference 2019, Western Sydney University Parramatta City Campus, 21-25 January 2019.

11. Hội nghị Khoa học Giải tích - Đại số, Trường Đại học Đồng Nai, Tỉnh Đồng Nai, 22/5/2019.
12. Hội nghị Toán học Miền Trung - Tây Nguyên lần thứ 3, Trường Đại học Tây Nguyên, Thành phố Buôn Ma Thuột, Daklak, 02-04/09/2019.
13. Hội nghị Đại số - Lý thuyết số - Hình học và tô pô 2019, Trường Cao đẳng Sư phạm Bà Rịa - Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu, 04 - 06/12/2019.

## **7 Công bố**

Các kết quả chính của Luận án đã được công bố trong 03 bài báo. Trong đó, 02 bài được đăng trên các tạp chí thuộc danh mục ESCI, 01 bài đăng trên trang arXiv.org dưới dạng tiền ấn phẩm và đã submit cho một tạp chí thuộc danh mục SCIE.

# Nội dung Luận án

Luận án được trình bày thành 4 chương bên cạnh đó còn có các phần như Phần tổng quan, Kết luận của luận án, Đề xuất của luận án, Tài liệu tham khảo, và Chỉ mục. Các chương được bố cục như sau.

## Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại một số kết quả về vành chia. Các kết quả này chúng tôi sẽ sử dụng trong các chương sau.

## Chương 2. Nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương trong vành chia

Mục đích chính của chúng tôi trong Chương 2 là chứng minh rằng mọi nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương của nhóm nhân  $D^*$  của vành chia  $D$  đại số trên  $F$  đều nằm trong tâm  $F$ .

**Định lý 2.1 [Luận án, Định lý 2.8].** *Cho  $D$  là một vành chia tâm  $F$  và giả sử  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương của  $D^*$ . Nếu  $N$  đại số trên  $F$  thì  $N$  nằm trong tâm  $F$ .*

Kết quả này tổng quát hóa Định lý 2.4 trong [18] và trả lời cho Giả thuyết 1 trong [19] cho trường hợp  $N$  là nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương đại số trên tâm  $F$ .

## Chương 3. Nhóm con gần á chuẩn tắc và nhóm con tối đại trong nhóm tuyến tính trên vành chia

Trong Chương 3, chúng tôi trình bày các kết quả liên quan đến nhóm con gần á



chuẩn tắc và nhóm con tối đại trong nhóm tuyến tính trên vành chia thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent suy rộng. Giả sử tâm  $F$  của vành chia  $D$  là một tập hợp vô hạn không đếm được và  $D$  vô hạn chiều trên tâm. Chúng tôi sẽ chứng minh mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của  $GL_n(D)$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent suy rộng đều nằm trong tâm  $F$ . Đây là một kết quả tổng quát hóa kết quả trong [26] cho trường hợp tâm  $F$  là một tập hợp vô hạn không đếm được.

**Định lý 3.1 [Luận án, Định lý 3.5].** *Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn không đếm được. Giả sử  $D$  đại số trên tâm  $F$  và  $[D : F] = \infty$ . Nếu  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $GL_n(D)$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent suy rộng khác không  $f(x_1, \dots, x_m) = 0$  trên  $M_n(D)$  thì  $N$  nằm trong tâm  $F$ .*

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu các nhóm con tối đại của  $GL_n(D)$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent và chứng minh nếu  $M$  là một nhóm con tối đại của  $GL_n(D)$  thỏa  $F[M]$  đại số trên  $F$  thì  $M$  bất khả quy tuyệt đối (nghĩa là  $F[M] = M_n(D)$ ).

**Định lý 3.2 [Luận án, Định lý 3.6].** *Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn và  $[D : F] = \infty$ . Giả sử  $M$  là một nhóm con tối đại của  $GL_n(D)$  sao cho  $F(M)$  đại số trên  $F$ . Nếu  $M$  thỏa một LPI khác không trên  $F$  thì  $M$  bất khả quy tuyệt đối.*

## Chương 4. Nhóm con gần á chuẩn tắc trong vành chia

Trong Chương 4, chúng tôi trình bày các nghiên cứu về nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm của nhóm nhân của một vành chia thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ suy rộng. Chúng tôi sẽ chứng minh rằng nếu nhóm nhân  $D^*$  của một vành chia  $D$  chứa một nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ suy rộng thì  $D$  hữu hạn tâm. Kết quả này tổng quát hơn kết quả của K. Chiba trong [4].

**Định lý 4.1 [Luận án, Định lý 4.6].** *Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn. Nếu  $D^*$  chứa một nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm  $F$  thỏa một đồng*

*nhất thức hữu tỉ suy rộng khác không thì  $D$  hữu hạn tâm.*

Hơn nữa, sử dụng kết quả này chúng tôi thu được kết quả về nhóm con gần á chuẩn tắc thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ đại số suy rộng. Chúng tôi chứng minh nếu vành chia  $D$  có tâm vô hạn và  $D^*$  chứa một nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ đại số suy rộng không tầm thường bậc bị chặn thì  $D$  hữu hạn tâm.

**Định lý 4.2 [Luận án, Định lý 4.15].** *Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn và  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm của  $D^*$ . Nếu  $N$  thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ đại số suy rộng không tầm thường bậc bị chặn thì  $D$  hữu hạn tâm.*

Từ đây chúng tôi suy ra được một số hệ quả tổng quát hóa hoặc tổng quát hóa một phần các kết quả đã có trong [1, 3].

# Kết luận của luận án

Dưới đây là một số kết quả được rút ra từ luận án.

1. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  và giả sử  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương của  $D^*$ . Nếu  $N$  đại số trên  $F$  thì  $N$  nằm trong  $F$  [Luận án, Định lý 2.8].
2. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn không đếm được. Giả sử  $D$  đại số trên  $F$  và  $[D : F] = \infty$ . Nếu  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $GL_n(D)$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent suy rộng thì  $N$  nằm trong  $F$  [Luận án, Định lý 3.5].
3. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn và  $[D : F] = \infty$ . Giả sử  $M$  là một nhóm con tối đại của  $GL_n(D)$  sao cho  $F(M)$  đại số trên  $F$ . Nếu  $M$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent thì  $M$  bất khả quy tuyệt đối [Luận án, Định lý 3.6].
4. Cho  $D$  là một vành chia có tâm vô hạn. Nếu  $D^*$  chứa một nhóm con gần á chuẩn tắc không nằm trong tâm thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ suy rộng khác không thì  $D$  hữu hạn tâm [Luận án, Định lý 4.6].
5. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn và  $[D : F] = \infty$ . Cho  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $D^*$  không nằm trong  $F$ . Giả sử  $M$  là một nhóm con tối đại của  $N$  sao cho  $C_D(M) \setminus F$  chứa một phần tử đại số trên  $F$ . Nếu  $M$  thỏa một đồng nhất thức đa thức Laurent khác không thì  $M$  giao hoán [Luận án, Định lý 4.8].

6. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn và giả sử  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $D^*$  không nằm trong  $F$ . Nếu  $N$  thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ đại số suy rộng không tầm thường bậc bị chặn thì  $D$  hữu hạn tâm [Luận án, Định lý 4.15].
7. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  và giả sử  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $D^*$  không nằm trong tâm  $F$ . Nếu  $N$  đại số trên  $F$  bậc bị chặn thì  $D$  hữu hạn tâm [Luận án, Hệ quả 4.17].
8. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  vô hạn và  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $D^*$  không nằm trong  $F$ . Nếu  $xy - yx$  đại số trên  $F$  bậc bị chặn với mọi  $x, y \in N$  thì  $D$  hữu hạn tâm [Luận án, Hệ quả 4.18].
9. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  và giả sử  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc không giao hoán của  $D^*$ . Nếu  $xyx^{-1}y^{-1}$  đại số trên  $F$  bậc bị chặn với mọi  $x, y \in N$  thì  $D$  hữu hạn tâm [Luận án, Hệ quả 4.19].
10. Cho  $D$  là một vành chia có tâm  $F$  và giả sử  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $D^*$  không nằm trong  $F$ . Nếu  $\text{char}(D) = 0$  và tồn tại một phần tử  $a \notin F$  sao cho  $axa^{-1}x^{-1}$  đại số trên  $F$  bậc bị chặn với mọi  $x \in N$  thì  $D$  hữu hạn tâm [Luận án, Hệ quả 4.20].

# Đề xuất của luận án

Trong Chương 2, chúng tôi đã chứng minh rằng nếu  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương đại số trên tâm  $F$  của vành chia  $D$  thì  $N$  nằm trong  $F$ . Chúng tôi dự định sẽ tiếp tục nghiên cứu bài toán này trong trường hợp tổng quát.

**Bài toán 1.** *Cho  $D$  là một vành chia tâm  $F$ . Nếu  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc giải được địa phương của  $D^*$  thì  $N$  nằm trong  $F$ .*

Gần đây, B. X. Hải và H. V. Khánh đã đưa ra câu trả lời khẳng định cho Bài toán 1 trong trường hợp vành chia có tâm vô hạn [14]. Tuy nhiên, Bài toán 1 vẫn chưa được giải quyết trong trường hợp vành chia có tâm hữu hạn.

Trong [23], I. Kaplansky đã chứng minh rằng nếu vành chia  $D$  thỏa một đồng nhất thức đa thức thì  $D$  hữu hạn tâm. Sau đó, K. Chiba [4] đã chứng minh rằng  $D$  là vành chia hữu hạn tâm nếu  $D$  có tâm vô hạn và  $D^*$  chứa một nhóm con á chuẩn tắc  $N$  không nằm trong tâm của  $D^*$  sao cho  $N$  thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ suy rộng. Trong Chương 4, chúng tôi đã chứng minh rằng điều này vẫn đúng nếu  $N$  là một nhóm con gần á chuẩn tắc của  $D^*$ . Trong bài toán sau, chúng tôi dự định sẽ chứng minh điều tương tự khi  $N$  là một nhóm con tựa chuẩn tắc (nhóm con  $H$  của một nhóm  $G$  được gọi là *tựa chuẩn tắc* trong  $G$  nếu  $HK = KH$  với mọi nhóm con  $K$  của  $G$ ).

**Bài toán 2.** *Cho  $D$  là một vành chia có tâm vô hạn. Nếu  $D^*$  chứa một nhóm con tựa chuẩn tắc không nằm trong tâm thỏa một đồng nhất thức hữu tỉ suy rộng khác không thì  $D$  hữu hạn tâm.*

Các bài toán chúng tôi nêu trên là các vấn đề chúng tôi đang tiếp tục nghiên cứu.

Việc giải quyết các bài toán trên sẽ mang lại các kết quả mới đóng góp vào sự hiểu biết về cấu trúc vành chia và các nhóm con trong vành chia.

# Danh mục các công trình của tác giả

1. B. X. Hai, T. H. Dung and M. H. Bien, Almost subnormal subgroups in division rings with generalized algebraic rational identities, *arXiv:1709.04774v1* [math.RA] 13 Sep 2017, *submitted*.
2. T. H. Dung, On Almost Subnormal Subgroups and Maximal Subgroups in Skew Linear Groups, *International Electronic Journal of Algebra* **25** (2019), 35–42.
3. T. H. Dung, A Note on Locally Soluble Almost Subnormal Subgroups in Division Rings, *International Journal of Group Theory*, Available Online from 25 July 2019, doi: 10.22108/ijgt.2019.116399.1546.

# Tài liệu tham khảo

- [1] S. Akbari, M. Arian-Nejad and M. L. Mehrabadi, On Additive Commutator Groups in Division Rings, *Result. Math.* **33** (1998), 9–21.
- [2] M. H. Bien and D. H. Dung, On normal subgroups of division rings which are radical over a proper division subring, *Studia Sci. Math. Hungar.* **51** (2014), no. 2, 231–242.
- [3] M. A. Chebotar, Y. Fong and P. H. Lee, On division rings with algebraic commutators of bounded degree, *Manuscripta Math.* **113** (2004), 153–164.
- [4] K. Chiba, Generalized rational identities of subnormal subgroups of skew fields, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), no. 6, 1649–1653.
- [5] T. T. Deo, M. H. Bien and B. X. Hai, On division subrings normalized by almost subnormal subgroups in division rings, *Period. Math. Hungar.*, doi:10.1007/s10998-019-00282-5.
- [6] T. T. Deo, M. H. Bien and B. X. Hai, On weakly locally finite division rings, *Acta Math. Vietnam* **44** (2019), 553–569.
- [7] T. H. Dung, On Almost Subnormal Subgroups and Maximal Subgroups in Skew Linear Groups, *Int. Electron. J. Algebra* **25** (2019), 35–42.
- [8] T. H. Dung, A Note on Locally Soluble Almost Subnormal Subgroups in Division Rings, *Int. J. Group Theory*, Available Online from 25 July 2019, doi: 10.22108/ijgt.2019.116399.1546.



- [9] B. X. Hai, On locally nilpotent maximal subgroups of multiplicative group of a division ring, *Acta Math. Vietnam.* **36** (2011), no. 1, 113–118.
- [10] B. X. Hai, T. T. Deo and M. H. Bien, On subgroups in division rings of type 2, *Studia Sci. Math. Hungar.* **49** (2012), no. 4, 549–557.
- [11] B. X. Hai, T. H. Dung and M. H. Bien, Almost subnormal subgroups in division rings with generalized algebraic rational identities, *arXiv: 1709.04774v1 [math.RA]* 13 Sep 2017, submitted.
- [12] B. X. Hai and D. V. P. Ha, On locally solvable maximal subgroups of the multiplicative group of a division ring, *Vietnam J. Math.* **38** (2010), no. 2, 237–247.
- [13] B. X. Hai and L. K. Huynh, On subnormal subgroups of the multiplicative group of a division ring, *Vietnam J. Math.* **32** (2004), no. 1, 21–24.
- [14] B. X. Hai and H. V. Khanh, On almost subnormal subgroups in division rings, *arXiv: 1908.04925v1 [math.RA]*, 14 Aug 2019.
- [15] B. X. Hai, H. V. Khanh and M. H. Bien, Generalized power central group identities in almost subnormal subgroups of  $GL_n(D)$ , *Algebra i Analiz* **31** (2019), no. 4 (to appear), *arXiv:1801.06001v3 [math.RA]* 19 Mar 2019.
- [16] B. X. Hai and N. K. Ngoc, A note on the existence of non-cyclic free subgroups in division rings, *Arch. Math. (Basel)* **101** (2013), no. 5, 437–443.
- [17] B. X. Hai and N. V. Thin, On subnormal and Maximal Subgroups in Division Rings, *Southeast Asian Bull. Math.* **32** (2008), 931–937.
- [18] B. X. Hai and N. V. Thin, On locally nilpotent subgroups of  $GL_1(D)$ , *Comm. Algebra* **37** (2009), 712–718.
- [19] B. X. Hai and N. V. Thin, On subnormal subgroups in general skew linear groups, *Vestnik St. Petersburg Univ. Math.* **46** (2013), no. 1, 43–48.

- [20] B. X. Hai, N. A. Tu, On multiplicative subgroups in division rings, *J. Algebra Appl.* **15** (2016), no. 3, 1–16.
- [21] B. Hartley, Free groups in normal subgroups of unit groups and arithmetic groups, *Contemp. Math.* **93** (1989), 173–177.
- [22] N. Jacobson, Structure theory for algebraic algebras of bounded degree, *Ann. of Math.* **46** (1945), 695–707.
- [23] I. Kaplansky, Rings with a polynomial identity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 575–580.
- [24] M. Mahdavi-Hezavehi, S. Akbari-Feyzaabaadi, M. Mehraabaadi and H. Hajie-Abolhassan, On derived groups of division rings II, *Comm. Algebra* **23** (1995), no. 8, 2881–2887.
- [25] M. Mahdavi-Hezavehi, M. G. Mahmudi and S. Yasamin, Finitely generated subnormal subgroups of  $GL_n(D)$  are central, *J. Algebra* **225** (2000), 517–521.
- [26] L. Makar-Limanov, On subnormal subgroups of skew fields, *J. Algebra* **114** (1988), no. 2, 261–267.
- [27] N. K. Ngoc, M. H. Bien and B. X. Hai, Free subgroups in almost subnormal subgroups of general skew linear groups, *Algebra i Analiz* **28** (2016), no. 5, 220–235, translation in *St. Petersburg Math. J.* **28** (2017), no. 5, 707–717.
- [28] M. Ramezan-Nassab and D. Kiani, Nilpotent and polycyclic-by-finite maximal subgroups of skew linear groups, *J. Algebra* **399** (2014), 269–276.
- [29] C. J. Stuth, A generalization of the Cartan-Brauer-Hua theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **15** (1964), 211–217.
- [30] B. A. F. Wehrfritz, A note on almost subnormal subgroups of linear groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **117** (1993), no. 1, 17–21.

- [31] A. E. Zalesskii, Solvable groups and crossed products, (in Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* **67** (1965), no. 109, 154–160.