ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

——oo——

NGUYỄN NGỌC TRỌNG

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG GIẢI TÍCH ĐIỀU HÒA VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG LIÊN KẾT VỚI TOÁN TỬ LOẠI SCHRÖDINGER

Ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 62 46 01 02

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TP. Hồ Chí Minh-2019

Công trình được hoàn thành tại

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG- HCM

——oo——

Người hướng dẫn khoa học:

1. HDC: PGS TS. LÊ XUÂN TRƯỜNG

2. HDP: TS. BÙI LÊ TRỌNG THANH

Phản biện 1: TS. Nguyễn Minh Quân

Phản biện 2: TS. Nguyễn Anh Triết

Phản biện 3: TS. Hồ Ngọc Kỳ

Phản biện độc lập 1: GS.TSKH. Đinh Nho Hào

Phản biện độc lập 2: TS. Phan Thành Việt

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

vào lúc giờ ngày tháng năm

Có thể tìm luận án trên tại các thư viện:

- Thư viện Khoa học Tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh
- Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

Tổng quan

Lý thuyết Calderón-Zygmund cho tính phân kì dị được giới thiệu lần đầu bởi Calderón và Zygmund vào năm 1952 . Bằng cách chứng minh biến đổi Riesz bậc hai $\nabla^2(-\Delta)^{-1}$ bị chặn trên L^p với mọi $p \in (1, \infty)$, họ đưa ra kết quả chính quy: Với $f \in L^p, u$ là nghiệm của phương trình $-\Delta u = f$ thì $\nabla^2 u \in L^p$ với mọi $p \in (1, \infty)$. Năm 1983, Iwaniec đã xây dựng tính chính quy L^p, với $p \in (1, \infty)$ cho ∇u với u là nghiệm phương trình Euler $-\Delta u = \mathrm{div} f$ bằng cách chứng minh biến đổi Riesz bậc một: $\nabla(-\Delta)^{-1/2}, (-\Delta)^{-1/2}\nabla$ bị chặn trên L^p với mọi $p \in (1, \infty)$. Đây chỉ là hai trong rất nhiều nghiên cứu của nhiều tác giả khác góp phần khẳng định vai trò của tích phân kì dị đối với tính chính quy của nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng, cũng như đối với giải tích điều hòa.

Thêm nữa, mặc dù toán tử Calderón-Zygmund có thể không bị chặn trên L^p khi $p = 1$ hoặc $p = \infty$ nhưng chúng lại bị chặn từ không gian Hardy H^1 vào L^1 và từ L^∞ vào không gian BMO. Do đó, không gian Hardy và không gian BMO là sự thay thế hữu ích cho các không gian L^1, L^∞ và giữ vai trò quan trọng trong lý thuyết Calderón-Zygmund về tích phân kỳ dị cũng như trong lý thuyết nội suy. Tuy nhiên, một số tích phân kì dị không bị chặn trên không gian Hardy hay BMO. Do đó không gian Hardy và BMO cổ điển không phải lúc nào cũng thích hợp để nghiên cứu tích phân kì dị. Mặt khác ta cũng cần nhấn mạnh rằng: các không gian và tích phân kì dị cổ điển có thể xem là các không gian và tích phân kì dị liên kết với toán tử Laplace.

Quan sát trên đã đặt ra nhu cầu nghiên cứu các không gian hàm liên kết với toán tử vi phân $\mathbb{L}$ nào đó sao cho các tích phân kì dị liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ bị chặn trên các không gian này.

Trong luận án này, chúng tôi xét trường hợp $\mathbb{L} = -\Delta + \mathbb{V}$ là toán tử Schrödinger trên $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$, trong đó thế vị không âm $\mathbb{V} \in L^q_{\mathrm{loc}}$ thuộc vào lớp Hölder ngược $RH_q (q \geq n/2)$, nghĩa là tồn tại hằng số $C = C(q, \mathbb{V}) > 0$ sao cho bất đẳng thức Hölder ngược

$$\Big(\frac{1}{|B|}\int\limits_B \mathbb{V}^q(x)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{|B|}\int\limits_B \mathbb{V}(x)dx$$

thỏa mãn với mọi quả cầu $B \subset \mathbb{R}^n$.

Hướng nghiên cứu giải tích điều hòa và phương trình đạo hàm riêng liên kết với toán tử loại Schrödinger được mở đầu bằng các công trình của Fefferman, Zhong và Shen. Họ đã xây dựng các đánh giá nền tảng cho nghiệm cơ bản của toán tử $\mathbb{L}$ cũng như tính bị chặn của các biến đổi Riesz: $\nabla\mathbb{L}^{-1/2}, \mathbb{L}^{-1/2}\nabla, \nabla\mathbb{L}^{-1}\nabla$ và $\nabla^2\mathbb{L}^{-1}$ trên không gian Lebesgue L^p với $p \in (1, \infty)$. Từ đó, cùng với tác động tích cực của các lý thuyết khác, chủ đề này đã phát triển không ngừng thành một lý thuyết đa dạng và phong phú. Hàng loạt nghiên cứu đã được tiến hành theo các hướng:

- Thiết lập các tính chất quan trọng cho các lớp không gian hàm liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ (không gian BMO, Hardy, Morrey, Besov, Triebel-Lizorkin,...).
- Tính bị chặn của tích phân kì dị liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ (biến đổi Riesz, thế vị Riesz, thế vị Bessel, hàm Littlewood-Paley,...)
- Tính chính quy nghiệm cho các lớp phương trình đạo hàm riêng dạng divergence và nondivergence.

Trên cơ sở những nghiên cứu đã có, sử dụng các phương pháp của giải tích điều hòa, giải tích thực và một số công cụ của giải tích hàm, luận án này trình bày những kết quả của chúng tôi trong việc xây dựng các không gian BMO, Morrey, Besov-Morrey liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ chứa nhiều lớp không gian đã có như trường hợp riêng. Đồng thời, luận án cũng xét đến tính bị chặn của một số tích phân kì dị liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ như:

- Biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz: $\mathcal{R}_{\mathbb{L}} = \nabla\mathbb{L}^{-1/2}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}^* = \mathbb{L}^{-1/2}\nabla$ và $\mathcal{R}_{\text{div}} = \nabla\mathbb{L}^{-1}\nabla$.
- Hàm $\mathbb{L}$-Littlewood-Paley: $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}(f)(x) = \left(\int_0^\infty |Q_t(f)(x)|^2 \dfrac{dt}{t}\right)^{1/2}$
  trong đó $Q_t f(x) = t^2\mathbb{L}e^{-t^2\mathbb{L}}f(x)$, với $\{e^{-s\mathbb{L}}\}_{s\geq 0}$ là nửa nhóm sinh bởi toán tử $\mathbb{L}$.
- Thế vị $\mathbb{L}$-Riesz: $\mathbb{I}_\beta = \mathbb{L}^{-\beta/2}$ với $0 < \beta < n$.
- Thế vị $\mathbb{L}$-Bessel: $\mathbb{J}_\beta = (\mathrm{I} + \mathbb{L})^{-\beta}$ với $\beta > 0$.
- Hoán tử của biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz và thế vị $\mathbb{L}$-Riesz.
- Tính chính quy của các lớp phương trình loại Schrödinger.

Những vấn đề luận án nghiên cứu có ý nghĩa khoa học và thực tiễn rõ ràng trong các lĩnh vực của giải tích điều hòa, phương trình đạo hàm riêng và ứng dụng. Những nghiên cứu này sẽ góp phần bổ sung vào những hiểu biết về giải tích điều hòa và phương trình đạo hàm riêng liên kết với toán tử loại Schrödinger.

Cụ thể hơn, luận án xem xét ba vấn đề chính được trình bày lần lượt trong chương 2, 3, 4 của luận án:

Chương 2. Tích phân kì dị trên không gian BMO liên kết với toán tử loại Schrödinger.

Không gian các hàm có dao động trung bình bị chặn BMO được đề xuất lần đầu tiên vào năm 1961 bởi John và Nirenberg, đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết nội suy và chính quy cho phương trình đạo hàm riêng. Mặt khác, ta biết rằng một số toán tử Calderón-Zygmund (như biến đổi Hilbert trên đường thẳng thực, biến đổi Riesz và thế vị Riesz liên kết với toán tử Laplace,...) bị chặn trên L^2 nhưng không bị chặn trên L^∞. Tuy nhiên, do những đánh giá tiêu chuẩn trên nhân liên kết đảm bảo rằng chúng bị chặn từ L^∞ vào BMO. Điều đó dẫn đến các toán tử này bị chặn trên L^p với mọi $p \in [2, \infty)$. Do đó, không gian BMO là sự thay thế tự nhiên cho L^∞ trong lý thuyết tích phân kì dị Calderón-Zygmund.

Trong chủ đề này, chúng tôi giới thiệu lớp trọng $\mathbb{L}$-doubling và không gian loại BMO có trọng liên kết với toán tử $\mathbb{L}$. Cụ thể hơn, chúng tôi đưa ra không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ (xem Định nghĩa 2.4.1) với $0 \leq \beta < 1, \theta \geq 0$ và ω thuộc lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt $A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ (xem Định nghĩa 2.1.1) đồng thời thỏa điều kiện $\mathbb{L}$-doubling $D_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ (xem Định nghĩa 2.3.1). Từ đó, chúng tôi nghiên cứu tính bị chặn của biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz $\mathbb{T}$ trên không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$. Áp dụng các kết quả này, tính chính quy $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ cho phương trình loại Schödinger $\mathbb{L}u = \operatorname{div} f$ được đưa ra. Đồng thời, tính bị chặn trên $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ của toán tử $\mathbb{L}$-Littlewood-Paley $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$ cũng được xem xét.

Điểm mới của không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ nằm ở lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt $A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ và $\mathbb{L}$-doubling $D_\infty^{\mathbb{L},\infty}$. Ta biết rằng, năm 1974, Muckenhoupt và Wheeden giới thiệu lớp trọng Muckenhoupt cổ điển A_∞ . Năm 2011, Harboure và các cộng sự đã xây dựng lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt $A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ chứa thật sự lớp trọng này. Với $\omega \in A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$, họ thiết lập các kết quả quan trọng về tính bị chặn trên $L^p(\omega)$ cho các toán tử $\mathbb{T} \in \{\mathcal{R}_{\mathbb{L}}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}^*, \mathcal{R}_{\mathrm{div}}\}$ và $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$.

Khi xem xét các lớp hàm trọng thì các tính chất loại doubling giữ vai trò cốt yếu. Lớp trọng Muckenhoupt thỏa mãn điều kiện doubling cổ điển nhưng lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt thì lại không. Do đó, chúng tôi đưa ra khái niệm $\mathbb{L}$-doubling mở rộng khái niệm doubling cổ điển và chỉ ra rằng lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt thỏa mãn điều kiện $\mathbb{L}$-doubling. Không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ do chúng tôi đề nghị chứa một số không gian loại BMO đã được giới thiệu bởi [B. Muckenhoupt, R. Wheeden (1976), *Studia Mathematica*], [J. Dziubański, G. Garrigos, T. Martinez, J. Torrea, J. Zienkiewicz (2005), *Mat. Z*] và [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2009), *J. Math. Anal. Appl*]. Chúng tôi xây dựng tính $\mathbb{L}$-doubling cùng một số đặc trưng mới của lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt thông qua lớp trọng $\mathbb{L}$-Hölder ngược, thiết lập các đánh giá Hörmander cho nhân liên kết. Ngoài ra, bất đẳng thức John-Nirenberg và một số bổ đề cần thiết cho không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ cũng được xây dựng. Từ đó, chúng tôi thu được tính bị chặn của toán tử $\mathbb{T}$ và hàm $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$ trên không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ cũng như tính chính quy cho phương trình Schrödinger $\mathbb{L}u = \operatorname{div} f$. Các kết quả của chúng tôi mở rộng Định lý 1, Định lý 2 và Hệ quả 1 trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2009), *J. Math. Anal. Appl*] cùng Định lý 5.27 trong [J. Dziubański, G. Garrigos, T. Martinez, J. Torrea, J. Zienkiewicz (2005),*Mat. Z.*] và đã được công bố trong (T5). Các kết quả chính của chương bao gồm Định lý 2.6, Hệ quả 2.6 và Định lý 2.7.

Chương 3. Tích phân kì dị trên không gian Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger.

Năm 1938, không gian Morrey cổ điển được giới thiệu bởi Morrey để nghiên cứu phương trình elliptic bậc hai. Lớp không gian này cho phép thu được tính chính quy chặt hơn cho các bài toán biên elliptic và parabolic. Nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu tính bị chặn của tích phân kì dị trên không gian loại Morrey vì nhiều tính chất nghiệm của phương trình đạo hàm riêng được kết nối với tính bị chặn này.

Gần đây, nhiều kết quả trên không gian Morrey đã được tổng quát hóa cho trường hợp có trọng. Điều này mở rộng các phiên bản nổi tiếng tương ứng bằng cách chỉ ra nhiều tích phân kì dị không chỉ bị chặn trên không gian Lebesgue có trọng mà còn trên không gian Morrey có trọng. Song song với đó, hướng nghiên cứu xây dựng lớp không gian Morrey liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ mở rộng các không gian Morrey đã có cũng được tiến hành.

Trong luận án, chúng tôi giới thiệu không gian loại Morrey $\mathbb{M}_{\alpha,\theta}^{p,s}(\omega,\nu)$ liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ trong đó ω,ν là trọng Muckenhoupt (xem Định nghĩa 3.1.1). Sau đó chúng tôi thiết lập các đánh giá Morrey có trọng cho các toán tử: $\mathbb{T}, \mathbb{I}_\beta$ và hoán tử của chúng với một hàm BMO. Như một áp dụng, kết quả chính quy Morrey cho hai phương trình loại Schrödinger $\mathbb{L}u = \operatorname{div} f$ và $\mathbb{L}^{\beta/2}u = g$ được thiết lập.

Không gian $\mathbb{M}_{\alpha,\theta}^{p,s}(\omega,\nu)$ là mở rộng của các lớp không gian Morrey đã có trong [I. Fofana (1988), *Afrika Mat*], [Y. Komori, S. Shirai (2009), *Math. Nachr.*], [L. Tang, J. Dong (2009), *J. Math. Anal. Appl*], [J. Feuto (2014), *J Fourier Anal Appl*]. Các kết quả của chúng tôi mở rộng các kết quả đã có trong [L. Tang, J. Dong (2009), *J. Math. Anal. Appl*] và được công bố trong (T6). Các Định lý 3.2, 3.2, 3.3, 3.3 và Hệ quả 3.4.1, 3.4.2 là các kết quả chính của chương.

Chương 4. Tích phân kì dị trên không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger.

Không gian Besov được nghiên cứu sôi nổi vì tầm quan trọng đối với lý thuyết không gian hàm, các phép nhúng, lý thuyết nội suy, đặc trưng vết và chính quy nghiệm của phương trình đạo hàm riêng. Ta nhấn mạnh rằng không gian Besov cổ điển có thể xem như không gian liên kết với toán tử Laplace hoặc căn bậc hai của nó trên $\mathbb{R}^n$. Chính xác là

$$B_{p,q}^{\alpha,m,-\Delta}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{B_{p,q}^{\alpha,m,-\Delta}} < \infty \right\}, \tag{0.1}$$

với $\|f\|_{B_{p,q}^{\alpha,m,-\Delta}} = \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{-\alpha} \left\| (t\sqrt{-\Delta})^m e^{-t\sqrt{-\Delta}} f \right\|_{L^p}^q \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, m \in \mathbb{N}$.

Tuy nhiên, lớp không gian Besov cổ điển không phải lúc nào cũng phù hợp cho việc nghiên cứu tích phân kì dị. Để khắc phục nhược điểm đó, bằng cách thay toán tử Laplace bằng một toán tử vi phân nào đó, lý thuyết không gian Besov liên kết với toán tử đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học.

- Lý thuyết không gian Besov $\mathbf{B}_{p,q}^{\alpha,P}(\mathbb{R}^n)$ liên kết với toán tử P thỏa mãn điều kiện chặn trên Gaussian được nghiên cứu trong [H. Q. Bui, X. T. Duong, L. X. Yan (2012), *Adv. Math*] nhưng chỉ với $-1 < \alpha < 1, 1 \leq p, q \leq \infty$. Chú ý rằng toán tử loại Schrödinger $\mathbb{H} = -\Delta + |x|^2$ (toán tử Hermite) là trường hợp đặc biệt của P.

- Cũng cho không gian Hermite-Besov, Bui và Duong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*] định nghĩa không gian loại này thông qua hàm Littlewood-Paley của nửa nhóm Hermite-Poisson. Điểm mới của công trình này nằm ở chỗ có thể mở rộng miền chỉ số $\alpha \in \mathbb{R}, 0 \leq p, q \leq \infty$ cho không gian Hermite-Besov thuần nhất $\mathbf{B}_{p,q}^{\alpha,\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n)$ thay vì chỉ là $-1 < \alpha < 1, 1 \leq p, q \leq \infty$. Đặc biệt, Bui và Duong đã xây dựng thành công đặc trưng phân tử cho không gian $\mathbf{B}_{p,q}^{\alpha,\mathbb{H}}(\mathbb{R}^n)$. Từ đó, hai tác giả chứng minh toán tử $\mathbb{I}_\beta$ và $\mathbb{J}_\beta$ bị chặn trên không gian Hermite-Besov.

Một hướng nghiên cứu tiếp theo cũng rất được quan tâm: nhiều tác giả xem xét không gian loại Besov-Morrey $\mathrm{BM}_{p,q,r}^{\alpha,-\Delta}(\mathbb{R}^n)$ tổng quát hóa không gian Besov cổ điển bằng cách thay thế chuẩn L^p trong (0.1) bởi chuẩn Morrey $\mathbf{M}_p^r$. Nhu cầu này nảy sinh từ việc nghiên cứu phương trình Navier-Stoke và áp dụng. Không gian Besov-Morrey không chỉ kế thừa nhiều tính chất của không gian Besov mà còn diễn tả sâu sắc hơn về tính chất dao động địa phương và tính kì dị của hàm số. Ta điểm qua vài nét về lịch sử nghiên cứu của không gian Besov-Morrey.

- Không gian $\mathrm{BM}_{p,q,r}^{\alpha,-\Delta}(\mathbb{R}^n)$ được giới thiệu lần đầu bởi Kozono và Yamazaki để nghiên cứu phương trình Navier-Stokes với dữ kiện thuộc không gian loại này.

- Sau đó, Mazzucato đã thiết lập phân tích sóng nhỏ cho lớp không gian này. Chú ý rằng trong các công trình của Kozono, Yamazaki và Mazzucato, các tác giả chỉ phát triển lý thuyết không gian $\mathrm{BM}^{\alpha,-\Delta}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$ với $1 \leq p \leq r < \infty, 1 \leq q \leq \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Năm 2005, Tang và Xu đã đưa ra định nghĩa không gian $\mathrm{BM}^{\alpha,-\Delta}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$ cho $0 < p \leq r < \infty, 0 < q \leq \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Họ còn chứng minh định lý Fourier multiplier, xây dựng đặc trưng rời rạc và tính bị chặn của toán tử giả vi phân trên không gian này.

- Sawano, Tanaka đã thiết lập các đặc trưng nguyên tử và phân tử cho $\mathrm{BM}^{\alpha,-\Delta}_{p,q,r}(\mathbb{R}^n)$ với $0 < p \leq r < \infty, 0 < q \leq \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tiếp nối và kết hợp hai hướng nghiên cứu nêu ra ở trên, luận án xây dựng không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger, cụ thể là toán tử Hermite trên $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ xác định bởi $\mathbb{H} = -\Delta + |x|^2$. Dễ thấy rằng toán tử Hermite là một trường hợp đặc biệt của toán tử Schrödinger khi $\mathbb{V}(x) = |x|^2$.

Chính xác hơn, như một tiếp nối và mở rộng của bài báo [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*], chúng tôi giới thiệu không gian Hermite-Besov-Morrey $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$ (xem Định nghĩa 4.3.4) với $0 < p \leq r < \infty, 0 < q \leq \infty$ và $\alpha \in \mathbb{R}$ thông qua hàm Littlewood-Paley liên kết với nhân Poisson sinh bởi $\mathbb{H}$.

Khi khảo sát không gian Besov liên kết với toán tử, các tác giả khác chủ yếu dựa trên kĩ thuật Fourier multipliers. Trong khi đó, nghiên cứu của chúng tôi lấy hàm Littlewood-Paley liên kết với nhân nhiệt cùng kĩ thuật hàm cực đại được phát triển bởi Fefferman, Stein và Peetre làm nền tảng để thiết lập đặc trưng phân tử cho $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$. Đây là công cụ cơ bản để chúng tôi thu được kết quả chính quy cho các phương trình fractional Hermite $\mathbb{H}^s u = f$ và $(\mathbb{H} + I)^s u = f$ trong đó I là ánh xạ đồng nhất.

Các kết quả này mở rộng một phần kết quả trong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*] và được công bố trong (T7). Các Định lý 3.2, 3.2, 3.3, 3.3 và Hệ quả 3.4.1, 3.4.2 là các kết quả chính của chương.

Ba vấn đề trọng tâm trên cấu thành luận án của chúng tôi với tên gọi

MỘT SỐ BÀI TOÁN TRONG GIẢI TÍCH ĐIỀU HÒA VÀ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG LIÊN KẾT VỚI TOÁN TỬ LOẠI SCHRÖDINGER.

Cấu trúc của luận án bao gồm phần tổng quan, kiến thức chuẩn bị, ba chương chính, kết luận, danh mục công trình của tác giả luận án và tài liệu tham khảo. Toàn bộ các kết quả được trình bày trong luận án đã được công bố trong [T5-T7]. Ngoài ra, phương pháp nghiên cứu ở đây cũng được áp dụng thành công cho một số bài toán khác và đã công bố trong [T1-T4]. Một phần trong các kết quả này đã được báo cáo tại "Hội nghị toán học Miền Trung-Tây Nguyên lần thứ 2, Đà Lạt 09 - 11/12/2017".

Chương 2

Tích phân kì dị trên không gian BMO liên kết với toán tử loại Schrödinger

2.1 Giới thiệu

Khi $\mathbb{V} \in RH_{n/2}$, lý thuyết hàm trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt liên kết với toán tử $\mathbb{L}$ được giới thiệu trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2011),*J. Math. Anal. Appl*]. Ta sẽ nhắc lại các định nghĩa ở đây.

Định nghĩa 2.1.1. *Cho $\theta \geq 0$ và $1 < p < \infty$, lớp trọng $A_p^{\mathbb{L},\theta}$ gồm các trọng ω thỏa mãn*

$$\Big(\fint_B \omega\Big)^{1/p}\Big(\fint_B \omega^{-1/(p-1)}\Big)^{1/p'} \leq C|B|\Psi_\theta(B) \tag{2.1.1}$$

với mọi quả cầu $B = B(x,r)$, ở đây $\Psi_\theta(B) = \Big(1+\frac{r}{\rho(x)}\Big)^\theta$.

Khi $p = 1$, lớp trọng $A_1^{\mathbb{L},\theta}$ là tập hợp các trọng ω sao cho

$$\fint_B \omega \leq C\omega(y)\Psi_\theta(B), \quad y \in B \quad h.k.n$$

với mọi quả cầu $B = B(x,r)$.

Thêm nữa, với $p \geq 1$, đặt $A_p^{\mathbb{L},\infty} = \bigcup_{\theta\geq 0} A_p^{\mathbb{L},\theta}, \quad A_\infty^{\mathbb{L},\infty} = \bigcup_{p\geq 1} A_p^{\mathbb{L},\infty}$.

Chú ý 2.1.2. *Ta có một số nhận xét sau đây:*

- *Lớp $A_p^{\mathbb{L},\theta}$ tăng theo θ và nếu $\theta = 0$ chúng đồng nhất với lớp Muckenhoupt A_p.*
- *Trong trường hợp tổng quát, lớp $A_p^{\mathbb{L},\theta}$ chứa thật sự lớp A_p khi $\theta > 0$ (xem [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2011),*J. Math. Anal. Appl*]).*

Một phiên bản $\mathbb{L}$-Hölder ngược cũng được giới thiệu trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2011),*J. Math. Anal. Appl*]. Với $\eta > 1$, đặt $RH_\eta^{\mathbb{L},\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} RH_\eta^{\mathbb{L},\theta}$ trong đó $RH_\eta^{\mathbb{L},\theta}$ gồm các hàm trọng ω sao cho tồn tại $C > 0$ sao cho

$$\left(\fint_B \omega^\eta\right)^{1/\eta} \leq C\left(\fint_B \omega\right)\Psi_\theta(B) \tag{2.1.2}$$

với mọi quả cầu $B = B(x,r)$.

Trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2011),*J. Math. Anal. Appl*], Harboure và các cộng sự đã chứng minh rằng các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz $\mathcal{R}$ và hàm $\mathbb{L}$-Littlewood-Paley $\mathbb{G}_\mathbb{L}$

$$\mathbb{G}_\mathbb{L}(f)(x) = \left(\int_0^\infty \left|t^2\mathbb{L}e^{-t^2\mathbb{L}}f(x)\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{1/2} \tag{2.1.3}$$

bị chặn trên $L^p(\omega)$ với $\omega \in A_p^{\mathbb{L},\infty}$, $1 < p < \infty$.

Trong chương này, chúng tôi xây dựng lớp trọng $\mathbb{L}$-doubling $D_p^{\mathbb{L},\theta}$ (xem Định nghĩa 2.3.1). Từ đó chúng tôi thiết lập không gian $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$ với $\omega \in A_p^{\mathbb{L},\infty}$ và thỏa điều kiện $\mathbb{L}$-doubling. Cuối cùng, sử dụng tính bị chặn trên $L^p(\omega)$ được đưa ra bởi Harboure, chúng tôi chứng minh tính bị chặn của toán tử $\mathbb{T}$ và $\mathbb{G}_\mathbb{L}$ trên không gian này (xem Định lý 2.6.3 và 2.7.3). Từ đó, kết quả chính quy $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$ cho phương trình loại Schrödinger

$$(-\Delta + \mathbb{V})u = \operatorname{div} f \tag{2.1.4}$$

được thiết lập.

Chương này gồm 7 mục. Mục 2.2 dành cho việc thiết lập đặc trưng của lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt thông qua lớp $\mathbb{L}$-Hölder ngược. Trong Mục 2.3, định nghĩa lớp trọng $\mathbb{L}$-doubling được giới thiệu. Mối quan hệ giữa lớp trọng $\mathbb{L}$-doubling và lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt cũng được chứng minh. Mục 2.4 dành cho việc đưa ra định nghĩa không gian $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$ và xây dựng các bất đẳng thức dạng John-Nirenberg cho không gian $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$. Trong Mục 2.5, chúng tôi thiết lập các đánh giá nhân liên kết. Sử dụng các đặc trưng về không gian $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$ cùng với các đánh giá nhân liên kết, Mục 2.6 dành cho việc chứng minh tính bị chặn của toán tử $\mathbb{T}$ trên $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$. Từ đó, ta thu được tính chính quy cho phương trình (2.1.4). Sau cùng, tính bị chặn trên $\mathrm{BMO}_\mathbb{L}^{\beta,\theta}(\omega)$ của toán tử $\mathbb{G}_\mathbb{L}$ được trình bày trong Mục 2.7.

2.2 Đặc trưng mới của lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt

Mục này dành cho việc xây dựng một số đặc trưng dạng $\mathbb{L}$-Hölder ngược cho lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt. Với $s > 1$, ta đặt

$$F_s^{\mathbb{L}} = \bigcup_{\eta > s'} \left(RH_\eta^{\mathbb{L},\infty} \cap A_{s/\eta'}^{\mathbb{L},\infty} \right).$$

Mệnh đề 2.2.1. *Lớp $F_s^{\mathbb{L}}$ tăng theo s, hơn nữa $\bigcup_{s>1} F_s^{\mathbb{L}} = A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$*

Bổ đề 2.2.2. *Cho $\eta > 1$ và $\omega \in A_\infty^{\mathbb{L},\infty} \bigcap RH_\eta^{\mathbb{L},\infty}$. Khi đó, tồn tại $\gamma > 1$ để $\omega \in RH_{\gamma\eta}^{\mathbb{L},\infty}$.*

2.3 Lớp trọng $\mathbb{L}$-doubling

Như đã trình bày ở trên, lớp trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt có thể không thỏa mãn điều kiện doubling D_p. Tuy nhiên, đây lại là tính chất quan trọng để xử lý tính bị chặn của tích phân kì dị trên không gian có trọng. Để khắc phục, chúng tôi giới thiệu lớp trọng $\mathbb{L}$-doubling như sau

Định nghĩa 2.3.1. *Cho $\theta \geq 0$ và $1 \leq p < \infty$. Hàm trọng $\omega \in L^1_{\text{loc}}$ được gọi là thuộc lớp $D_p^{\mathbb{L},\theta}$ nếu tồn tại hằng số $C = C(\omega) > 0$ sao cho với mọi quả cầu $B \subset \mathbb{R}^n$ và $t > 1$, ta có*

$$\omega(tB) \leq Ct^{np}\omega(B)\Psi_\theta(B).$$

Với $1 \leq p < \infty$, ta đặt $D_p^{\mathbb{L},\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} D_p^{\mathbb{L},\theta}$, $D_\infty^{\mathbb{L},\theta} = \bigcup_{p \geq 1} D_p^{\mathbb{L},\theta}$, $D_\infty^{\mathbb{L},\infty} = \bigcup_{\theta \geq 0} D_\infty^{\mathbb{L},\theta}$.

Mối quan hệ giữa $A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ và $D_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ được thể hiện trong bổ đề sau.

Bổ đề 2.3.2. *Cho $\theta \geq 0$ và $1 \leq p < \infty$. Nếu $\omega \in A_p^{\mathbb{L},\theta}$ thì $\omega \in D_q^{\mathbb{L},\theta p}$ với $q = p(1 + \frac{\theta}{n})$.*

2.4 Không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$

Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu lớp không gian BMO tổng quát.

Định nghĩa 2.4.1. *Cho $0 \leq \beta < 1$, $\theta \geq 0$ và hàm trọng ω. Ta nói $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ nếu tồn tại $C > 0$ sao cho các bất đẳng thức*

$$\int_B |f| \leq C\omega(B)|B|^{\beta/n}\Psi_\theta(B), \quad khi \quad r \geq \rho(x) \tag{2.4.8}$$

và

$$\int_B |f - f_B| \leq C\omega(B)|B|^{\beta/n}, \quad khi \quad r < \rho(x) \tag{2.4.9}$$

được thỏa mãn với mọi quả cầu $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. *Ta gọi* M_1, M_2 *lần lượt là infimum các hằng số xuất hiện trong* (2.4.8), (2.4.9). *Khi đó ta định nghĩa chuẩn* $\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)} = \max\{M_1, M_2\}$.

Chú ý rằng, khi $\omega \in A_p$ và $\theta = 0$, không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ đã được giới thiệu trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2009), *J. Math. Anal. Appl*]. Hơn nữa, khi $\omega \in A_p^{\mathbb{L},\infty}$ với $p > 1$ thì ω có thể không thỏa điều kiện doubling, do đó không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ là mở rộng thực sự lớp không gian trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2009), *J. Math. Anal. Appl*].

Mệnh đề sau cho thấy định nghĩa của không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ không phụ thuộc vào chỉ số θ khi θ đủ lớn.

Mệnh đề 2.4.3. *Cho* $0 \leq \beta < 1$, $\theta_1 \geq \theta \geq 0$ *và* $\omega \in D_\infty^{\mathbb{L},\theta}$. *Khi đó hàm* $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_1}(\omega)$ *khi và chỉ khi tồn tại* $C > 0$ *sao cho*

$$\int_{B(x,\rho(x))} |f| \leq C\,|B(x,\rho(x))|^{\beta/n}\,\omega(B(x,\rho(x)))$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ *và*

$$\int_B |f - f_B| \leq C\omega(B)|B|^{\beta/n}$$

với mọi quả cầu $B = B(x,r), r < \rho(x)$ *trên* $\mathbb{R}^n$. *Từ đó ta thấy* $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_1}(\omega) = \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ *với mọi* $\theta_1 \geq \theta$.

2.4.1 Bất đẳng thức John-Nirenberg

Ta đặt $\mathcal{B} = \{B(x,r) \subset \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n, r < \rho(x)\}$. Khi đó, bất đẳng thức dạng John-Nirenberg cho $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ được phát biểu như sau.

Mệnh đề 2.4.8 . *Cho* $\beta \in [0,1), p, \sigma \geq 1, \theta, \theta_1, \theta_2 \geq 0$ *và* $\omega \in A_p^{\mathbb{L},\theta} \cap D_\sigma^{\mathbb{L},\theta_1}$. *Khi đó, với mỗi* $\nu \in [1, p'] \setminus \{\infty\}$, *tồn tại hằng số* $C_\nu > 0$ *sao cho với mọi* $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)$ *ta có*

$$\Big(\int_B |f - f_B|^\nu\,\omega^{1-\nu}\Big)^{1/\nu} \leq C_\nu \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)}\omega(B)^{1/\nu}|B|^{\beta/n}$$

với mọi $B \in \mathcal{B}$ *và*

$$\Big(\int_B |f|^\nu \omega^{1-\nu}\Big)^{1/\nu} \leq C_\nu \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)} \Psi_\phi(B)\omega(B)^{1/\nu}|B|^{\beta/n}$$

với mọi $B \notin \mathcal{B}$.

2.4.2 Một số bất đẳng thức khác

Ta giới thiệu hai bất đẳng thức có trọng cho hàm $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$.

Mệnh đề 2.4.11. *Giả sử $p, \sigma \geq 1, \theta, \theta_1, \theta_2 \geq 0, \omega \in A_p^{\mathbb{L},\theta} \cap D_\sigma^{\mathbb{L},\theta_1}$. Khi đó, với mỗi $\nu \in [1, p'] \setminus \{\infty\}$, tồn tại $C_\nu > 0$ sao cho*

(i) Nếu $\sigma > 1$ hoặc $\beta > 0$ thì

$$\Big(\int_B |f|^\nu \,\omega^{1-\nu}\Big)^{1/\nu} \leq C_\nu \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)} \omega(B)^{1/\nu} |B|^{\beta/n} \Psi_\phi(B) \max\left\{1, \left(\frac{\rho(x)}{r}\right)^{n\sigma-n+\beta}\right\}$$

với mọi quả cầu $B = B(x,r)$ và $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)$.

(ii) Nếu $\sigma = 1$ và $\beta = 0$ thì

$$\Big(\int_B |f|^\nu \,\omega^{1-\nu}\Big)^{1/\nu} \leq C_\nu \|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)} \omega(B)^{1/\nu} |B|^{\beta/n} \Psi_\phi(B) \max\left\{1, 1 + \log_2\left(\frac{\rho(x)}{r}\right)\right\}$$

với mọi quả cầu $B = B(x,r)$ và $f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)$.

Bổ đề 2.4.12. *Cho $1 \leq \sigma < \infty, \mu \geq 1$ và $\omega \in A_{\sigma'}^{\mathbb{L},\infty} \cap D_\mu^{\mathbb{L},\infty}$. Tồn tại $\theta_1 \geq 0$ và $C > 0$ sao cho với mọi $B = B(x_0, r), f \in \mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ và $k \in \mathbb{N}$ ta có*

$$\omega\big(2^k B\big)^{1/\sigma'} \left(\int_{2^k B} |f - f_B|^\sigma \omega^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} \leq C \,\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)} \, r^\beta \omega(B) 2^{k(n\mu+\beta)} \left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta_1}$$

nếu $\mu > 1$ hoặc $\beta > 0$, và

$$\omega\big(2^k B\big)^{1/\sigma'} \left(\int_{2^k B} |f - f_B|^\sigma \omega^{1-\sigma}\right)^{1/\sigma} \leq C \,\|f\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)} \, r^\beta \omega(B) k 2^{kn} \left(1 + \frac{2^k r}{\rho(x_0)}\right)^{\theta_1}$$

nếu $\mu = 1$ và $\beta = 0$.

Chúng tôi còn thiết lập một số bất đẳng thức kỹ thuật khác nhưng vì dung lượng của bản tóm tắt nên không trình bày ở đây (xin xem thêm ở tiểu mục 2.4.2 trong luận án).

2.5 Đánh giá nhân liên kết của các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz

Ta ký hiệu toán tử $\mathcal{R}$ là một trong các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz: $\mathcal{R}_{\mathbb{L}}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}^*$ và gọi nhân liên kết với $\mathcal{R}$ là $\mathcal{K}(x,y)$, tức là $\mathcal{R}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x,y) f(y) dy$. Các đánh giá về nhân liên kết giữ vai trò quan trọng trong lý thuyết tích phân kì dị. Chúng tôi đưa ra bổ đề sau để chứng minh kết quả chính của chương này.

Bổ đề 2.5.2. *Giả sử* $\mathbb{V} \in RH_q$ *với* $q > n, 0 \leq \beta < 1 - n/q$. *Cho* $1 < s < \infty$ *và* $\widetilde{\delta} \in (0, 1 - n/q)$. *Khi đó, với mỗi* $N \in \mathbb{N}$, *tồn tại* $C_N > 0$ *sao cho nhân liên kết* $\mathcal{K}$ *thỏa mãn*

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{R<|x_0-y|<2R} |\mathcal{K}(x,y) - \mathcal{K}(x_0,y)|^s dy\right)^{1/s} \leq C_N R^{-n}\left(\frac{r}{R}\right)^{\widetilde{\delta}}\left(1 + \frac{R}{\rho(x)}\right)^{-N}$$

với mọi $|x - x_0| < r \leq \rho(x_0)$ *và* $r < R/2$.

Ngoài ra, chúng ta cần một số đánh giá nhân được đưa ra trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2009), *J. Math. Anal. Appl*], [Z. Shen (1995), *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*] và [T. Ma, P. R. Stinga, J. L. Torrea, C. Zhang (2014), *Ann. Mat. Pura Appl*] nhưng vì khuôn khổ bản tóm tắt chúng tôi không trình bày ở đây (xin xem mục 2.5 trong luận án).

2.6 Biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz và tính chính quy cho lớp phương trình loại Schrödinger

Bây giờ ta giới thiệu tính chính quy $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ cho toán tử $\mathcal{R}$ và $\mathbb{T}$. Nhắc lại, ta ký hiệu $\mathbb{T}$ là một trong các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz: $\mathcal{R}_{\mathrm{div}}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}^*$.

Định lý 2.6.3. *Giả sử* $\mathbb{V} \in RH_n, 0 \leq \beta < 1 - n/q_0$ *trong đó* $q_0 = \sup\{q : \mathbb{V} \in B_q\}$. *Cho* $\theta \geq 0$. *Giả sử thêm rằng* $\omega \in D_\mu^{\mathbb{L},\theta} \cap A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ *với* $1 \leq \mu < 1 + \frac{1-n/q_0-\beta}{n}$. *Khi đó, toán tử* $\mathcal{R}$ *bị chặn trên* $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$. *Do đó khẳng định trên cũng đúng cho toán tử* $\mathbb{T}$.

Hệ quả 2.6.4. *Giả sử* $\mathbb{V} \in RH_n, 0 \leq \beta < 1 - n/q_0$ *trong đó* $q_0 = \sup\{q : \mathbb{V} \in B_q\}$. *Cho* $\theta \geq 0$. *Giả sử thêm rằng* $\omega \in D_\sigma^{\mathbb{L},\theta} \cap A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ *với* $1 \leq \sigma < 1 + \frac{1-n/q_0-\beta}{n}$. *Khi đó, nếu* u *là nghiệm phương trình* $(-\Delta + \mathbb{V})u = \mathrm{div}\, g$ *thì* $\|\nabla u\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)} \lesssim \|g\|_{\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)}$.

2.7 Hàm $\mathbb{L}$-Littlewood-Paley

Tính bị chặn trên $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ cho toán tử $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$ được thể hiện trong định lý sau

Định lý 2.7.3. *Cho* $\mathbb{V} \in RH_{n/2}$ *và* ε, γ, δ_1, δ_2 *là các hằng số xuất hiện trong Bổ đề 2.7.1 trong luận án. Đặt* $\Theta = \min\left(\frac{\varepsilon}{3}, \gamma, \delta_1, \frac{\delta_2}{3}\right)$. *Giả sử* $\sigma \geq 1, \beta \in (0,1), \theta_1 \geq 0$, $\theta_2 \geq 0$ *và* $\theta \geq \theta_1$ *sao cho* $\beta + \theta_1 + \theta_2 < \Theta$ *và* $\sigma < 1 + \frac{\Theta-\beta-\theta_1-\theta_2}{n}$. *Giả sử thêm* $\omega \in D_\sigma^{\mathbb{L},\theta_1} \cap A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$. *Khi đó, hàm* $\mathbb{L}$*-Littlewood-Paley* $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$ *bị chặn từ* $BMO_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta_2}(\omega)$ *đến* $BMO_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$.

NHẬN XÉT VÀ BÌNH LUẬN CHƯƠNG 2

- Khi $\mathbb{V} = 0$, toán tử $\mathcal{R}_{\mathbb{L}} = \nabla\mathbb{L}^{-1/2}$ là toán tử Calderon-Zygmund nên bị chặn trên $L^p(\omega)$ với mọi $1 < p < \infty$ và $\omega \in A_p$. Áp dụng điều đó, Muckenhoupt và các cộng sự chứng minh toán tử $\mathcal{R}_{\mathbb{L}}$ bị chặn trên $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ khi $\theta = 0, \omega \in A_\infty, \mathbb{V} = 0$.

- Trường hợp $\mathbb{V}$ là đa thức không âm, tính bị chặn trên L^p của toán tử $\mathbb{T}$ đã được chứng minh bởi Zhong. Sau đó, Shen đã thiết lập tính bị chặn trên L^p của toán tử $\mathbb{T}$ khi $\mathbb{V}$ thuộc lớp Hölder ngược. Năm 2005, Dziubański và các cộng sự chứng minh toán tử $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$ bị chặn trên $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ khi $\beta = 0, \theta = 0, \omega = 1$ tuy nhiên họ không xét toán tử $\mathbb{T}$ (xem [J. Dziubański, G. Garrigos, T. Martinez, J. Torrea, J. Zienkiewicz (2005),*Mat. Z.*]).

- Tính bị chặn trên $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ của toán tử $\mathbb{T}$ khi $\omega \in A_\infty, \theta = 0$ đã được chứng minh trong [B. Bongioanni, E. Harboure, O. Salinas (2009), *J. Math. Anal. Appl*]. Ta có chú ý quan trọng sau đây:

  Phương pháp của họ dựa nhiều vào tính bị chặn trên $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ *của các toán tử* $\nabla(-\Delta)^{-1/2}, (-\Delta)^{-1/2}\nabla$ *khi* $\omega \in A_\infty$ *và* $\theta = 0$. *Tuy nhiên, kết quả này có thể không đúng khi* $\omega \in D_\infty^{\mathbb{L},\infty}$ *hoặc* $\omega \in A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$. *Do đó, kỹ thuật của họ không áp dụng được cho kết quả của chúng tôi.*

Do đó, Định lý 2.6.3 và Hệ quả 2.6.4 mở rộng các nghiên cứu đã có cả về kết quả và phương pháp.

Chương 3

Tích phân kì dị trên không gian Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger

3.1 Giới thiệu

Đầu tiên, chúng tôi giới thiệu không gian Morrey tổng quát.

Định nghĩa 3.1.1. *Cho hai hàm trọng ω, ν và $\theta \in [0,1)$, $1 \le p \le \infty, 1 \le s \le \infty, \alpha \in \mathbb{R}$. Không gian $\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega,\nu)$ gồm các hàm $f \in L^p_{\rm loc}(\omega)$ thỏa mãn $\|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega,\nu)} < \infty$, trong đó*

$$\|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega,\nu)} = \sup_{r>0}\Big[\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big(\Big(1+r\rho^{-1}(x)\Big)^{\alpha}\nu\left(B(x,r)\right)^{-\theta}\Big\|f\mathbb{1}_{B(x,r)}\Big\|_{L^p(\omega)}\Big)^s dx\Big]^{1/s} < \infty.$$

Trường hợp $\omega = \nu$, để cho gọn ta sẽ viết $\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)$.

Chương này dành cho việc nghiên cứu tính bị chặn trên không gian $\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega,\nu)$ của các tích phân kỳ dị sau đây:

- Các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz: $\mathcal{R}_{\rm div}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}$ và $\mathcal{R}^*_{\mathbb{L}}$ (xem Định lý 3.2.6).
- Thế vị $\mathbb{L}$ -Riesz định nghĩa bởi: $\mathbb{I}_\beta f(x) = \mathbb{L}^{-\beta/2}f(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t\mathbb{L}}f(x)\, t^{\beta/2-1}dt$ với $0 < \beta < n$. (xem Định lý 3.3.6).

Ngoài ra, các kết quả tương ứng cho hoán tử của các toán tử ở trên cũng được thiết lập (xem Định lý 3.2.8 và 3.3.9). Ta biết rằng hoán tử phát sinh một cách tự nhiên khi xây dựng công thức nghiệm cho các phương trình đạo hàm riêng với hệ số không trơn. Do đó, việc nghiên cứu hoán tử giữ vai trò quan trọng trong giải tích điều hòa và phương trình đạo hàm riêng, thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học.

Cấu trúc của chương này như sau. Tính bị chặn trên $\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega,\nu)$ của biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz và thế vị $\mathbb{L}$-Riesz cùng hoán tử được trình bày lần lượt trong Mục 3.2 và 3.3. Cuối cùng, tính chính quy cho phương trình loại Schrödinger được thiết lập trong Mục 3.4.

3.2 Biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz và hoán tử

Ta đưa ra các bổ đề kỹ thuật sau đây.

Bổ đề 3.2.2 *Cho $\omega \in A_p, 1 \le p < \infty$ và $f \in L^p(\omega)$. Khi đó ta có*

$$\int_B |f(z)|\, dz \lesssim |B|\, \omega(B)^{-1/p} \, \|f \mathbb{1}_B\|_{L^p(\omega)}$$

cho mọi quả cầu $B \subset \mathbb{R}^n$.

Bổ đề 3.2.3 *Cho quả cầu $B = B(y,r)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có các khẳng định sau*

(i) $(1 + r\rho^{-1}(y))^\alpha \le \max\{1, 2^{-\alpha}\}\,(1 + 2r\rho^{-1}(y))^\alpha$.

(ii) Với mọi $m, j \in \mathbb{N}, j \ge 2, x \in B$ và $z \in S_j(B)$ ta có

$$\Big(1 + |x - z|\, \rho^{-1}(x)\Big)^{-m} \lesssim \Big(1 + 2^j r\rho^{-1}(y)\Big)^{-\frac{m}{N_0+1}}.$$

(iii) Với $m > (N_0+1)(|\alpha| + \alpha), j \in \mathbb{N}$ ta có $\dfrac{(1 + r\rho^{-1}(y))^\alpha}{(1 + 2^j r\rho^{-1}(y))^{\frac{m}{N_0+1}}} \lesssim (1 + 2^j r\rho^{-1}(y))^\alpha$.

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử $1 \le p, s \le \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 1/p)$ và $\omega \in A_p$. Khi đó tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $f \in \mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)$, $m > (N_0+1)(|\alpha| + \alpha)$ ta có*

$$\sup_{r>0} \Big[\int_{\mathbb{R}^n} \Big(\omega(B)^{1/p-\theta} \Big(1 + r\rho^{-1}(y)\Big)^\alpha \mathbb{F}(f, B) \Big)^s dy \Big]^{1/s} \le C\, \|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)},$$

trong đó $B = B(y,r)$ và $\mathbb{F}(f,B) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} j\left(1 + 2^j r\rho^{-1}(y)\right)^{-\frac{m}{N_0+1}} \omega\left(2^j B\right)^{-1/p} \left\|f \mathbb{1}_{2^j B}\right\|_{L^p(\omega)}$.

Nhắc lại, ta ký hiệu $\mathbb{T}$ là một trong các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz: $\mathcal{R}_{\mathrm{div}}, \mathcal{R}_{\mathbb{L}}, \mathcal{R}^*_{\mathbb{L}}$. Tiếp theo, ta giới thiệu định lý chính đầu tiên của chương.

Định lý 3.2.6. *Cho $\mathbb{V} \in RH_n$. Giả sử $1 < p < \infty, 1 \le s \le \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 1/p)$ và $\omega \in A_p$. Khi đó $\mathbb{T}$ bị chặn trên $\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)$.*

Định lý 3.2.8. *Cho $\mathbb{V} \in RH_n$ và $b \in BMO$. Giả sử $1 < p < \infty, 1 \le s \le \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 1/p)$ và $\omega \in A_p$. Khi đó tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $f \in \mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)$ ta có $\|[b, \mathbb{T}]f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)} \le C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)}$.*

3.3 Thế vị $\mathbb{L}$-Riesz và hoán tử

Mục này dành cho việc mở rộng định lý Hardy-Littlewood-Sobolev nổi tiếng sau đây.

Định lý 3.3.1. *(Hardy-Littlewood-Sobolev) Cho $0 < \beta < n, 1 < p < n/\beta$ và $1/q = 1/p - \beta/n$. Khi $\mathbb{V} = 0$ ta có $\mathbb{I}_\beta$ bị chặn từ L^p vào L^q.*

Trường hợp một chiều của định lý trên được đưa ra bởi Hardy và Littlewood. Kết quả nhiều chiều được Sobolev chứng minh. Năm 2015, Tang chứng minh tính bị chặn trên $L^p(\omega)$ cho toán tử $\mathbb{I}_\beta$ khi $\mathbb{V} \in RH_{n/2}$ và thu được kết quả quan trọng sau đây.

Bổ đề 3.3.2. *Cho $\mathbb{V} \in RH_{n/2}, 0 < \beta < n, 1 < p < n/\beta$ và $1/q = 1/p - \beta/n$. Giả sử $\omega \in A_{p,q}$. Khi đó $\mathbb{I}_\beta$ bị chặn từ $L^p(\omega^p)$ vào $L^q(\omega^q)$.*

Kết quả tương tự cho trường hợp $\mathbb{V} = 0$ đã được chứng minh vào năm 1974 bởi Muckenhoupt và Wheeden.

Ta cần các bổ đề kỹ thuật sau đây.

Bổ đề 3.3.4. *Cho $\beta \in (0, n), 1 < p < n/\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ và $1 \leq s \leq \infty$. Giả sử $1/q = 1/p - \beta/n, \theta \in [0, 1/q)$ và $\omega \in A_{p,q}$. Khi đó tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $f \in \mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p, \omega^q)$, $m > (N_0 + 1)(|\alpha| + \alpha)$ ta có*

$$\sup_{r>0}\Big[\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\omega^q(B)^{1/q-\theta}\Big(1 + r\rho^{-1}(y)\Big)^{\alpha}\mathbb{W}(f, B)\Big)^s dy\Big]^{1/s} \leq C\,\|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p,\omega^q)},$$

trong đó $B = B(y, r)$ và $\mathbb{W}(f, B) = \sum_{j=0}^{\infty} j\left(1 + 2^j r\rho^{-1}(y)\right)^{-\frac{m}{N_0+1}}\omega^q\left(2^j B\right)^{-1/q}\left\|f\mathbb{1}_{2^j B}\right\|_{L^p(\omega^p)}$.

Bổ đề 3.3.5. *Giả sử $\beta \in (0, n), 1 < p < n/\beta$. Cho $1/q = 1/p - \beta/n, \theta \in [0, 1/q)$ và $\omega \in A_{p,q}$. Khi đó tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $f \in L^p_{\rm loc}(\omega)$ và quả cầu $B = B(x, r)$ ta có*

$$\frac{1}{r^{n-\beta}}\int_B |f(z)|\,dz \leq C\,\|f\mathbb{1}_B\|_{L^p(\omega^p)}\,\omega^q(B)^{-1/q}.$$

Bây giờ, ta giới thiệu định lý chính thứ ba của chương.

Định lý 3.3.6. *Giả sử $\mathbb{V} \in RH_{n/2}, \beta \in (0, n), 1 < p < n/\beta, \alpha \in \mathbb{R}$ và $1 \leq s \leq \infty$. Cho $1/q = 1/p - \beta/n, \theta \in [0, 1/q)$ và $\omega \in A_{p,q}$. Khi đó $\mathbb{I}_\beta$ bị chặn từ $\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p, \omega^q)$ vào $\mathbb{M}^{q,s}_{\alpha,\theta}(\omega^q)$.*

Năm 2015, L. Tang xây dựng đánh giá có trọng cho hoán tử $[b, \mathbb{I}_\beta]$ với $b \in BMO$.

Bổ đề 3.3.7. *Cho $\mathbb{V} \in RH_{n/2}, 0 < \beta < n, 1 < p < \frac{n}{\beta}, \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\beta}{n}$ và $\omega \in A_{p,q}$. Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $b \in BMO$ và $f \in L^p(\omega^p)$ ta có $\left\|[b, \mathbb{I}_\beta]f\right\|_{L^q(\omega^q)} \leq C\|b\|_{BMO}\,\|f\|_{L^p(\omega^p)}$.*

Chú ý 3.3.8. *Năm 1991, Segovia và Torrea đã chứng minh Bổ đề 3.3 khi* $\mathbb{V} = 0$.

Tính bị chặn của $[b, \mathbb{I}_\beta]$ trên không gian mới của chúng tôi được thể hiện trong định lý sau.

Định lý 3.3.9. *Giả sử rằng* $\mathbb{V} \in RH_{n/2}$ *và* $b \in BMO$. *Cho* $\beta \in (0, n)$, $1 < p < n/\beta, \alpha \in \mathbb{R}, 1 \leq s \leq \infty$. *Nếu* $1/q = 1/p - \beta/n, \theta \in [0, 1/q)$ *và* $\omega \in A_{p,q}$ *thì tồn tại* $C > 0$ *sao cho với mọi* $f \in \mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p, \omega^q)$ *và* $b \in BMO$ *ta có* $\| [b, \mathbb{I}_\beta] \|_{\mathbb{M}^{q,s}_{\alpha,\theta}(\omega^q)} \leq C\|b\|_{BMO}\|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p,\omega^q)}$.

3.4 Chính quy cho phương trình loại Schrödinger

Trong mục này ta áp dụng các kết quả đã có để xây dựng đánh giá chính quy cho hai lớp phương trình loại Schrödinger.

Hệ quả 3.4.1. *Giả sử* $\mathbb{V} \in RH_n$. *Cho* $1 < p \leq \infty, 1 \leq s \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}, \omega \in A_p$ *và* $\theta \in [0, 1/p)$. *Tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho nếu* $f \in \mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)$ *và* u *là nghiệm của phương trình* $(-\Delta + \mathbb{V})u = \operatorname{div} f$, *thì* $\|\nabla u\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)} \leq C \|f\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega)}$.

Hệ quả 3.4.2. *Giả sử* $\mathbb{V} \in RH_{n/2}, \beta \in (0, 2)$, $1 < p < n/\beta, \alpha \in \mathbb{R}$. *Cho* $1 \leq s \leq \infty, 1/q = 1/p - \beta/n, \theta \in [0, 1/q)$, $\omega \in A_{p,q}$. *Tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho với mọi* $g \in \mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p, \omega^q)$ *và* u *là nghiệm của phương trình* $(-\Delta + \mathbb{V})^{\beta/2}u = g$ *thì ta có* $\|u\|_{\mathbb{M}^{q,s}_{\alpha,\theta}(\omega^q)} \leq C \|g\|_{\mathbb{M}^{p,s}_{\alpha,\theta}(\omega^p,\omega^q)}$.

NHẬN XÉT VÀ BÌNH LUẬN CHƯƠNG 3

- Năm 1994, Nakai chứng minh hai Định lý 3.3.6 và 3.3.9 nhưng chỉ cho trường hợp $\mathbb{V} = 0, \omega = \nu$ và $s = \infty, \theta = 1/q - 1/p, \alpha = 0$.
- Năm 2009, Komori và Shirai đã mở rộng kết quả của Nakai khi không đòi hỏi $\omega = \nu$ tuy nhiên họ vẫn cần điều kiện $\mathbb{V} = 0$ và $s = \infty, \theta = 1/q - 1/p, \alpha = 0$.
- Cũng trong năm 2009, các Định lý 3.2.6, 3.2.8, 3.3.6 và 3.3.9 đã được chứng minh bởi Tang và Dong [L. Tang, J. Dong (2009), *J. Math. Anal. Appl*] nhưng chỉ với $s = \infty, \omega = \nu = 1$.

Do đó, kết quả của chúng tôi mở rộng các kết quả đã có.

Chương 4

Tích phân kì dị trên không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger

4.1 Giới thiệu

Ta xét một trường hợp đặc biệt của toán tử $\mathbb{L}$ khi $\mathbb{V} = |x|^2$. Khi đó toán tử $\mathbb{L}$ được ký hiệu là $\mathbb{H} = -\Delta + |x|^2$ và được gọi là toán tử Hermite. Chương này dành cho việc tổng quát lý thuyết không gian Hermite-Besov thuần nhất bằng cách xây dựng không gian Hermite-Besov-Morrey thuần nhất $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$. Để làm điều đó, chúng tôi sử dụng một số kết quả trong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*], đặc biệt là công thức Calderon và các đánh giá cho nhân nhiệt. Từ đó, chúng tôi thiết lập tính chính quy cho hai lớp phương trình fractional Hermite: $\mathbb{H}^s u = f$ và $(\mathbb{H} + I)^s u = f$.

Chương này được tổ chức như sau. Mục 4.2 đưa ra định nghĩa các không gian hàm và một số kết quả chuẩn bị. Đặc trưng phân tử cho không gian Hermite-Besov-Morrey được trình bày trong Mục 4.3. Cuối cùng, Mục 4.4 dành cho việc khảo sát tính chính quy trên không gian Hermite-Besov-Morrey cho hai lớp phương trình fractional Hermite.

4.2 Định nghĩa và kết quả chuẩn bị

4.2.1 Hình lập phương nhị phân

Tập hợp $\mathbb{D}$ các hình lập phương nhị phân trên $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau

$$\mathbb{D} = \left\{ \prod_{j=1}^{n} \left[m_j 2^k, (m_j+1)2^k \right) : m_1, m_2, ..., m_n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Cho hình lập phương nhị phân $Q = \prod_{j=1}^{n} \left[m_j 2^k, (m_j+1)2^k \right)$ với $m_1, m_2, ..., m_n, k \in \mathbb{Z}$. Ta ký hiệu $\ell(Q)$ và x_Q lần lượt là chiều dài và tâm của Q. Khi đó $\ell(Q) = 2^k$ và $x_Q = \left((m_j + 1/2)2^k \right)_{j=1}^{n}$.

Hơn nữa, với mọi $\nu \in \mathbb{Z}$, ta đặt $\mathbb{D}_\nu = \{ Q \in \mathbb{D} : \ell(Q) = 2^\nu \}$.

4.2.2 Không gian Morrey

Ta nhắc lại định nghĩa không gian Morrey cổ điển.

Định nghĩa 4.2.1. *Với $0 < p \le r < \infty$, không gian Morrey $\mathbf{M}_p^r$ được định nghĩa bởi*

$$\mathbf{M}_p^r = \left\{ f \in L_{\text{loc}}^p : \|f\|_{\mathbf{M}_p^r} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \sup_{R>0} R^{n\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L^p(B(x_0,R))} < \infty \right\}.$$

Ta điểm qua một số kết quả về chuẩn Morrey.

Mệnh đề 4.2.2. *Ta có các kết luận sau*

- *Giả sử $0 < p \le r < \infty$. Khi đó, ta có $\|f\|_{\mathbf{M}_p^r} \sim \sup_{Q \in \mathbb{D}} |Q|^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \|f\|_{L^p(Q)}$, $\|f^\theta\|_{\mathbf{M}_p^r} = \|f\|_{\mathbf{M}_{p\theta}^{r\theta}}^{\theta}$ với mọi $\theta > 0$.*
- *Cho hàm đo được $F : \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}$ và $0 < q \le p < \infty$. Ta có*

$$\left\| \left(\int_a^b |F(\cdot,t)|^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \right\|_{\mathbf{M}_p^r} \le \left(\int_a^b \|F(\cdot,t)\|_{\mathbf{M}_p^r}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Tiếp theo, với $\theta > 0$, ta ký hiệu $\mathbb{M}_\theta$ là hàm cực đại Hardy-Littlewood:

$$\mathbb{M}_\theta f(x) = \sup \left(\frac{1}{|B|} \int_B |f(y)|^\theta dy \right)^{1/\theta} \quad \text{với } x \in \mathbb{R}^n,$$

trong đó sup được lấy trên tất cả quả cầu $B \subset \mathbb{R}^n$ chứa x.

Kế tiếp, ta giới thiệu một phiên bản của bất đẳng thức Fefferman-Stein giá trị vectơ cho không gian Morrey.

Mệnh đề 4.2.3. *Cho $0 < q \le \infty$, $0 < p \le r < \infty$ và $0 < \theta < \min\{p, q\}$. Khi đó, ta có*

$$\left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mathbb{M}_\theta(f_k)|^q \right)^{1/q} \right\|_{\mathbf{M}_p^r} \lesssim \left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^q \right)^{1/q} \right\|_{\mathbf{M}_p^r}$$

với mọi dãy hàm đo được $\{f_k\}_k$.

Chú ý 4.2.4. *Như một hệ quả của Mệnh đề 4.2.3, toán tử $\mathbb{M}_\theta$ bị chặn trên $\mathbf{M}_p^r$.*

Cho $0 < p \le r < \infty$ và $\nu \in \mathbb{Z}$. Với dãy $\{s_Q : Q \in \mathbb{D}_\nu\}$, ta đặt

$$A_\nu = \left(\sup_{J\in\mathbb{D}, \ell(J)\geqslant 2^\nu} \left(\frac{1}{|J|}\right)^{1-p/r} \sum_{Q\in\mathbb{D}_\nu, Q\subset J} |Q|^{1-p/r} |s_Q|^p \right)^{1/p}.$$

4.2.3 Các tính chất của nửa nhóm liên kết

Với $k \ge 0$ và $t > 0$, ta ký hiệu nhân liên kết với $(t\sqrt{\mathbb{H}})^k e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}}$ bởi $p_{t,k}(x,y)$. Ta nhắc lại ở đây các kết quả của Bổ đề 2.1, Mệnh đề 2.2 và Mệnh đề 2.5 trong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*].

Mệnh đề 4.2.6. *Với mọi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại $C > 0$ và $\delta > 0$ sao cho*

1. *Với mọi $t > 0, x, y \in \mathbb{R}^n$ ta có $|p_{t,k}(x,y)| \le C \dfrac{t^k}{\big(t + |x-y|\big)^{n+k}}$.*
2. *Với mọi $t > 0, x, y \in \mathbb{R}^n$ và $|h| < t$, ta có*

$$|p_{t,k}(x+h,y) - p_{t,k}(x,y)| \le C\Big(\frac{|h|}{t}\Big)^\delta \frac{t^k}{\big(t+|x-y|\big)^{n+k}}.$$

Mệnh đề 4.2.7. *Với mọi $k \ge 0, t > 0$ và $y \in \mathbb{R}^n$, ta có $p_{t,k}(\cdot, y) \in \mathcal{S}$.*

Với $f \in \mathcal{S}', t > 0, x \in \mathbb{R}^n$ và $k \in \mathbb{N}$, ta có thể định nghĩa $(t\sqrt{\mathbb{H}})^k e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} f(x) = \big\langle f, p_{t,k}(\cdot, x)\big\rangle$ trong đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích đối ngẫu trên $\mathcal{S}'$ và $\mathcal{S}$.

Bổ đề 4.2.8.[T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*] *Tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $m \in \mathbb{N}, \theta \in (0,\infty), t > 0, \nu \in \mathbb{Z}$ và $Q \in \mathbb{D}_\nu$ ta có*

$$\sup_{(z,t)\in\widetilde{Q}} \left| \mathbb{H}^{m/2} e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} f(z) \right| \lesssim \left(\frac{1}{|\widetilde{Q}|} \int_{\frac{3}{2}\widetilde{Q}} \left| \mathbb{H}^{m/2} e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} f(y) \right|^\theta dydt \right)^{1/\theta},$$

ở đây $\widetilde{Q} = Q \times [2^\nu, 2^{\nu+1})$ là hình lập phương trên $\mathbb{R}^{n+1}$.

Mệnh đề 4.2.9. *Với mọi $k \ge 0, t > 0$ và $\phi \in \mathcal{S}$, ta có $(t\sqrt{\mathbb{H}})^k e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} \in \mathcal{S}$.*

Với $f \in \mathcal{S}', t > 0$ và $k \in \mathbb{N}$, từ Mệnh đề 4.2.3 ta có thể định nghĩa $(t\sqrt{\mathbb{H}})^k e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ như sau $\langle (t\sqrt{\mathbb{H}})^k e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} f, \phi\rangle = \langle f, (t\sqrt{\mathbb{H}})^k e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} \phi\rangle$ với mọi $f \in \mathcal{S}'$ và $\phi \in \mathcal{S}$.

4.2.4 Công thức Calderón

Mệnh đề 4.2.10. [*T. A. Bui, X. T. Duong (2015)*, J. Fourier. Anal. Appl] *Cho* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ *và* $f \in \mathcal{S}'$. *Khi đó ta có*

$$f = -\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\int_0^\infty (t\sqrt{\mathbb{H}})^{m_1} e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}}(t\sqrt{\mathbb{H}})^{m_2} e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} f \frac{dt}{t}$$

trên $\mathcal{S}'$, *trong đó* $m = m_1 + m_2$ *và* $\mathcal{S}'$ *là đối ngẫu của không gian Schwartz* $\mathcal{S}$.

4.3 Không gian $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$

Đầu tiên, ta giới thiệu không gian m-Besov-Morrey thuần nhất liên kết với toán tử Hermite $\mathbb{H}$.

Định nghĩa 4.3.1. *Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, $p \leq r < \infty$ *và số nguyên dương*

$$m > n + \max\{\alpha, 0\} + \operatorname{int}\left[n\left(\frac{1}{\theta_0} - 1\right)\right] + 1,$$

trong đó $\theta_0 = \min\{1, p, q\}$.

Khi đó, ta định nghĩa không gian m-Hermite-Besov-Morrey thuần nhất $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}$ *như sau:*

$$\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\alpha}\left\|(t\sqrt{\mathbb{H}})^m e^{-t\sqrt{\mathbb{H}}} f\right\|_{\mathbf{M}^r_p}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Chú ý 4.3.2. *Nếu* $r = p$ *thì không gian* $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}$ *chính là không gian* $\mathrm{B}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q}$ *trong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015),* J. Fourier. Anal. Appl*].*

Ta sẽ chứng minh định nghĩa của không gian $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}$ không phụ thuộc vào cách chọn m khi m đủ lớn. Chính xác hơn, ta có kết quả sau đây (chứng minh được đưa ra ở phía sau).

Định lý 4.3.3. *Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ *và* $p \leq r < \infty$. *Giả sử* m_1, m_2 *là các số nguyên dương sao cho*

$$m_1, m_2 > n + \max\{\alpha, 0\} + \operatorname{int}\left[n\left(\frac{1}{\theta_0} - 1\right)\right] + 1,$$

trong đó $\theta_0 = \min\{1, p, q\}$. *Khi đó, không gian* $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m_1}_{p,q,r}$ *và* $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m_2}_{p,q,r}$ *đồng nhất với chuẩn tương đương.*

Như hệ quả của Định lý 4.3.3, ta định nghĩa không gian Hermite-Besov-Morrey như sau:

Định nghĩa 4.3.4. *Không gian Hermite-Besov-Morrey* $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$ *là một trong các không gian* $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}$, *với số nguyên dương*

$$m > n + \max\{\alpha, 0\} + \mathrm{int}\left[n\left(\frac{1}{\theta_0} - 1\right)\right] + 1.$$

Bây giờ, ta nhắc lại định nghĩa phân tử liên kết với toán tử Hermite được giới thiệu trong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*].

Định nghĩa 4.3.5. *Cho* $0 < r < \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ *và* $N, M \in \mathbb{N}^*$. *Hàm* u *được gọi là một* $(\mathbb{H}, M, N, \alpha, r)$ *phân tử nếu tồn tại hàm* b *và hình lập phương nhị phân* $Q \in \mathbb{D}$ *sao cho*
i) $u = (\sqrt{\mathbb{H}})^M b$,
ii) $\left|(\sqrt{\mathbb{H}})^k b(x)\right| \leq \ell(Q)^{M-k}|Q|^{\alpha/n-1/r}\left(1 + \frac{|x - x_Q|}{\ell(Q)}\right)^{-n-N}$
với mọi $k = 0, ..., 2M$. *Để thuận tiện, ta ký hiệu* $u = m_Q$.

Bây giờ, ta chứng minh kết quả chính đầu tiên của chương.

Định lý 4.3.6. *Cho* $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$, $p \leq r < \infty$ *và* $\theta_0 = \min\{1, p, q\}$.

(i) Với mọi $M, N \in \mathbb{N}^*$ *và* $m > n + \max\{\alpha, 0\} + \mathrm{int}\left[n\left(\frac{1}{\theta_0} - 1\right)\right] + 1$, *nếu* $f \in \mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}$ *thì tồn tại dãy* $(\mathbb{H}, M, N, \alpha, r)$ *phân tử* $\{m_Q\}_{Q\in\mathbb{D}_\nu,\nu\in\mathbb{Z}}$ *và dãy hệ số* $\{s_Q\}_{Q\in\mathbb{D}_\nu,\nu\in\mathbb{Z}}$ *sao cho* $f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{Q\in\mathbb{D}_\nu} s_Q m_Q$ *trên* $\mathcal{S}'$. *Hơn nữa, ta có* $\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} A_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}}$.

(ii) Ngược lại, giả sử $f = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{Q\in\mathbb{D}_\nu} s_Q m_Q$ *trên* $\mathcal{S}'$, *trong đó* $\{m_Q\}_{Q\in\mathbb{D}_\nu,\nu\in\mathbb{Z}}$ *là dãy* $(\mathbb{H}, M, N, \alpha, r)$ *phân tử và* $\{s_Q\}_{Q\in\mathbb{D}_\nu,\nu\in\mathbb{Z}}$ *là dãy hệ số thỏa mãn* $\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} A_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$. *Khi đó, ta có* $f \in \mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}$ *và* $\|f\|_{\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H},m}_{p,q,r}} \lesssim \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} A_\nu^q\right)^{\frac{1}{q}}$ *trong đó* $N, M \in \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $\frac{n}{n+N} < \theta_0$, $M > \max\left\{\frac{n}{\theta_0} - \alpha, m\right\}$ *với* $m > \max\{\alpha, 0\} + N + n$.

4.4 Chính quy cho phương trình loại Schrödinger

Để khảo sát các phương trình được đưa ra, ta cần nghiên cứu các toán tử $\mathbb{I}_{2s} = \mathbb{H}^{-s}$ và $\mathbb{J}_s = (I + \mathbb{H})^{-s}$, thường được gọi lần lượt là thế vị Hermite-Riesz và thế vị Hermite-Bessel.

Với mọi $\phi \in \mathcal{S}$, ta có

$$\mathbb{H}^{-s}\phi = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^s e^{-t\mathbb{H}}\phi\frac{dt}{t} \in \mathcal{S},$$

$$(I+\mathbb{H})^{-s}\phi = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^s e^{-t} e^{-t\mathbb{H}} \phi \frac{dt}{t} \in \mathcal{S}$$

với $\Gamma(s)$ là hàm Gamma của s.

Ta có thể định nghĩa các toán tử $\mathbb{H}^{-s} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ và $(I+\mathbb{H})^{-s} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ như sau

$$\langle \mathbb{H}^{-s} f, \phi \rangle = \langle f, \mathbb{H}^{-s}\phi \rangle \quad \text{và} \quad \langle (I+\mathbb{H})^{-s} f, \phi \rangle = \langle f, (I+\mathbb{H})^{-s}\phi \rangle$$

với mọi $f \in \mathcal{S}'$ và $\phi \in \mathcal{S}$. Chú ý rằng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích đối ngẫu giữa $\mathcal{S}'$ và $\mathcal{S}$. Nhắc lại, $\mathcal{S}'$ là đối ngẫu của không gian Schwartz $\mathcal{S}$.

Các kết quả chính quy của chúng tôi bao gồm:

Định lý 4.4.2. *Cho $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < s < 1, 0 < q \le \infty$, $0 < p \le r < \infty$. Khi đó tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $f \in \mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$ và u là nghiệm của phương trình $\mathbb{H}^s u = f$ thì $\|u\|_{\mathrm{BM}^{\alpha+2s,\mathbb{H}}_{p,q,r}} \le C\|f\|_{\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}}$.*

Định lý 4.4.3. *Cho $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < s < 1, 0 < q \le \infty$, $0 < p \le r < \infty$. Khi đó, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $f \in \mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$ và u là nghiệm của phương trình $(\mathbb{H}+I)^s u = f$ ta có $\|u\|_{\mathrm{BM}^{\alpha+2s,\mathbb{H}}_{p,q,r}} \le C\|f\|_{\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}}$.*

Định lý 4.4.2 và 4.4.3 là hệ quả trực tiếp của định lý sau đây.

Định lý 4.4.4. *Cho $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p \le r < \infty$ và $0 < q \le \infty$. Với $s > 0$, toán tử $\mathbb{I}_{2s} = \mathbb{H}^{-s}$ (tương ứng $\mathbb{J}_s = (I+\mathbb{H})^{-s}$) bị chặn từ $\mathrm{BM}^{\alpha,\mathbb{H}}_{p,q,r}$ đến $\mathrm{BM}^{\alpha+2s,\mathbb{H}}_{p,q,r}$.*

NHẬN XÉT VÀ BÌNH LUẬN CHƯƠNG 4

- Các kết quả của chúng tôi mở rộng các Định lý 3.2, 3.4, 5.1 và 5.2 trong [T. A. Bui, X. T. Duong (2015), *J. Fourier. Anal. Appl*] như trường hợp riêng.

- Cần nhấn mạnh rằng kỹ thuật của chúng tôi có thể áp dụng để nghiên cứu không gian Hermite-Besov-Morrey không thuần nhất cũng như không gian Hermite-Triebel-Lizorkin-Morrey thuần nhất và không thuần nhất. Các kết quả này đã được chúng tôi hoàn thành và đang gửi đăng.

KẾT LUẬN

Trong luận án này chúng tôi sử dụng các phương pháp của giải tích điều hòa để khảo sát tính bị chặn của một số tích phân kì dị trên các không gian hàm liên kết với toán tử loại Schrödinger. Từ đó, luận án nghiên cứu các kết quả chính quy cho một số lớp phương trình loại Schrödinger được đưa ra. Nội dung của luận án tập trung vào ba vấn đề. Thứ nhất là tích phân kì dị trên không gian BMO liên kết với toán tử loại Schrödinger. Thứ hai là tích phân kì dị trên không gian Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger. Và cuối cùng, luận án nghiên cứu tích phân kì dị trên không gian Besov-Morrey liên kết với toán tử loại Schrödinger.

Những kết quả mới đã được trình bày trong luận án bao gồm:

1. Xây dựng không gian $\mathrm{BMO}_{\mathbb{L}}^{\beta,\theta}(\omega)$ mở rộng các lớp không gian đã có. Giới thiệu lớp trọng $\mathbb{L}$ doubling và xây dựng đặc trưng mới của trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt. Chứng minh đánh giá nhân liên kết của các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz. Từ đó thiết lập tính bị chặn của toán tử $\mathbb{T}$ và $\mathbb{G}_{\mathbb{L}}$ trên lớp không gian này. Một áp dụng cho tính chính quy của phương trình loại Schrödinger $(-\Delta + \mathbb{V})u = \operatorname{div} f$ cũng được trình bày.

2. Giới thiệu không gian Morrey tổng quát $\mathbb{M}_{\alpha,\theta}^{p,s}(\omega, \nu)$. Chứng minh các biến đổi $\mathbb{L}$-Riesz, thế vị $\mathbb{L}$-Riesz cùng hoán tử của chúng bị chặn trên lớp không gian này. Từ đó, chúng tôi chứng minh kết quả chính quy cho lớp phương trình loại Schrödinger $(-\Delta + \mathbb{V})u = \operatorname{div} f$ và $(-\Delta + \mathbb{V})^{\beta/2}u = g$.

3. Xây dựng không gian Hermite-Besov-Morrey $\mathrm{BM}_{p,q,r}^{\alpha,\mathbb{H}}$. Thiết lập đặc trưng phân tử cho lớp không gian này. Từ đó chứng minh tính chính quy $\mathrm{BM}_{p,q,r}^{\alpha,\mathbb{H}}$ cho các lớp phương trình fractional Hermite $(-\Delta + |x|^2)^s u = f$ và $(-\Delta + |x|^2 + I)^s u = f$.

Trên cơ sở những kết quả đã có, để kết thúc, chúng tôi nêu ra ở đây một số vấn đề có thể nghiên cứu hay mở rộng:

1. Biến đổi Riesz bậc hai $\nabla^2 \mathbb{L}^{-1}$ trên không gian Hardy $H_{\mathbb{L}}^1(\omega)$ với $\omega \in D_\infty^{\mathbb{L},\infty} \cap A_\infty^{\mathbb{L},\infty}$.
2. Biến đổi Riesz bậc hai $\nabla^2 \mathbb{L}^{-1}$ trên không gian $\mathbb{M}_{\alpha,\theta}^{p,s}(\omega, \nu)$ với trọng $\mathbb{L}$-Muckenhoupt.
3. Nghiên cứu không gian $\mathrm{BM}_{p,q,r}^{\alpha,\mathbb{L}}$ khi $\mathbb{V} \in RH_n$.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

[T1] N. N. Trong (2015), "The Second-Order Riesz Transforms Related to Schrödinger Operators Acting on BMO-Type Spaces", *Vietnam J Math*, 43 (1), 1–22.

[T2] N. N. Trong, N. T. Tung (2016), "Weighted BMO type spaces associated to admissible functions and applications", *Acta Math. Vietnam*, 41 (2), 209–241.

[T3] N. N. Trong (2016), "The weighted $L^p - L^q$ boundedness of commutators of Schrödinger operators on the stratified Lie group G", *Vietnam J Math*, 44 (4), 839–856.

[T4] N. N. Trong, L. X. Truong (2018), "The Second-Order Riesz Transforms Related to Schrödinger Operators Acting on BMO Type Spaces on the Stratified Lie Group", *Vietnam J Math*, 46 (3), 629–651.

[T5] N. N. Trong, L. X. Truong (2018), "Riesz transforms and Littlewood-Paley G-function associated to Schrödinger operators on new weighted spaces", *J. Aust. Math. Soc*, 105(2), 201–228.

[T6] N. N. Trong, L. X. Truong (2018), "Generalized Morrey spaces associated to Schrödinger operators and applications", *Czech. Math. J*, 143 (4), 953–986.

[T7] N. A. Dao, N. N. Trong, L. X. Truong (2018), "Besov-Morrey Spaces Associated to Hermite Operators and applications to Fractional Hermite Equations", *Electron. J. Differ. Equ*, 2018 (187), 1–14.