ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

=======o0o=======

LƯU VŨ CẨM HOÀN

CHỈNH HÓA MỘT SỐ BÀI TOÁN NGƯỢC TRONG CÁC QUÁ TRÌNH KHUẾCH TÁN

Ngành: Toán Giải tích

Mã số ngành: 62460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2019

Công trình được hoàn thành tại: Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS. Nguyễn Huy Tuấn

Phản biện 1: PGS.TS. Nguyễn Bích Huy
Phản biện 2: TS. Trần Thanh Bình
Phản biện 3: TS. Trần Minh Phương
Phản biện độc lập 1: PGS.TS. Nguyễn Hữu Khánh
Phản biện độc lập 2: TS. Trần Minh Phương

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo họp tại .... vào lúc ...... giờ ...... ngày ...... tháng ...... năm ......

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:
1. Thư viện Tổng hợp Quốc gia TP. Hồ Chí Minh.
2. Thư viện Trường Đại học Khoa học Tự nhiên.

LỜI NÓI ĐẦU

Trong nhiều chuyên ngành của Toán thì lĩnh vực phương trình vi phân, đạo hàm riêng (PDEs) là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng của giải tích toán học và đóng vai trò cốt lõi trong các mô hình về vật lý, cơ học, hóa học, sinh học. Một trong những chủ đề "nóng" và có tính thời sự về PDEs là phương trình đạo hàm riêng với đạo hàm cấp không nguyên. Lý do ra đời của các phương trình này xuất phát từ nhu cầu thực tiễn. Trong những năm gần đây, rất nhiều bài toán đã không thể mô hình hoá được bằng các phương trình vi phân đạo hàm riêng với đạo hàm cấp nguyên như các phương trình elliptic, parabolic hay hyperbolic. Việc mô hình hoá các bài toán như vậy dẫn đến các khái niệm đạo hàm cấp không nguyên (fractional derivatives). Vài thập kỷ vừa qua là giai đoạn các bài toán với đạo hàm cấp không nguyên phát triển mạnh mẽ và ứng dụng sâu rộng vào rất nhiều lĩnh vực khoa học với số lượng lớn các bài báo, sách chuyên khảo của nhiều nhà toán học trên thế giới như S.G. Samko, K. S. Miller, B. Ross, I. Podlubny, F. Mainardi, v.v. Thể loại về loại phương trình này khá nhiều và dồi dào, nên trong luận án, chúng tôi chỉ đề cập đến các loại phương trình khuyếch tán (diffusion equation). Phương trình khuyếch tán với đạo hàm cấp không nguyên (còn gọi là fractional diffusion equation, FDE) đã lôi cuốn rất nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Theo chúng tôi tìm kiếm trên Mathscinet, có khoảng hơn 2000 công trình về chủ đề này. Số lượng các tạp chí công bố về chủ đề này rất lớn, trong số đó có nhiều tạp chí có uy tín của các nhà xuất bản lớn như: Springer, Elsevier, Taylor Francis, ... Trong các mô hình về các phương trình khuếch tán với đạo hàm cấp không nguyên (FDE), thì xuất hiện hai loại: bài toán thuận (Direct problem) và bài toán ngược (Inverse Problems). Bài toán thuận cho FDEs được nghiên cứu rất nhiều bởi các công trình của Giáo sư R. Gorenflo, ... Các nhà toán học tập trung khảo sát và công bố một số dạng bài khá lôi cuốn, chẳng hạn như sau:

1. Sự tồn tại và tính đều của nghiệm.
2. Các tính chất của nghiệm như: tính bùng nổ, tính tắt dần.
3. Xấp xỉ nghiệm của FDEs bằng các phương pháp số.

Bài toán ngược cho FDEs chỉ nghiên cứu sau bài toán thuận một thời gian, khi một số các hiện tượng thực tế được mô hình hóa bởi bài toán ngược. Mục tiêu của chúng tôi khi nghiên cứu bài toán ngược cho FDE là khảo sát tính không chỉnh và xây dựng nghiệm xấp xỉ. Trong thực tế, khi ta đo đạc dữ liệu thì luôn có sai số. Vì vậy, nếu tính ổn định nghiệm của bài toán không được thỏa mãn, tức là sai số nhỏ ở dữ liệu đo đạc dẫn đến sai số rất lớn ở nghiệm, thì sẽ gây khó khăn trong việc tính toán số. Vì thế, ta cần phải có các phương pháp "chỉnh hóa" để giải quyết vấn đề này. Bài toán được gọi là không chỉnh theo nghĩa Hadamard, nghĩa là một trong 3 trường hợp sau xảy ra:

1. Bài toán không có nghiệm.
2. Bài toán có nghiệm nhưng nghiệm không duy nhất.
3. Bài toán có nghiệm nhưng nghiệm không ổn định.

Để chỉnh hóa bài toán ngược, chúng ta cần thực hiện các bước sau:

- Xây dựng và thiết lập nghiệm chỉnh hóa cho các phương trình khuếch tán và chứng minh đây là bài toán chỉnh.

- Đánh giá tốc độ hội tụ và sai số giữa nghiệm chỉnh hóa với nghiệm chính xác.
- Đưa ra các ví dụ số để minh họa phương pháp mà chúng tôi thiết lập có hiệu quả cao.

Trong luận án này, chúng tôi khảo sát 2 chủ đề chính.

Chủ đề 1: Bài toán xác định hàm nguồn (Inverse source problem for fractional diffusion equation)

Chúng tôi liệt kê một số bài toán xác định hàm nguồn và các phương pháp nghiên cứu, ví dụ như Z. Ruan và các cộng sự (EECT, 2018) đã dùng phương pháp điều chỉnh tựa biên để nghiên cứu bài toán xác định hàm nguồn; S.A. Malik và các cộng sự đã khảo sát bài toán xác định hàm nguồn và đưa ra công thức tường minh cho nghiệm. Ngoài ra, một số công trình có liên quan về bài toán xác định hàm nguồn cho phương trình khuyếch tán với đạo hàm cấp không nguyên cũng được quan tâm, chẳng hạn như A.Deiveegan và các cộng sự.

Chủ đề này được trình bày ở chương 2 của Luận án. Trong chương 2, chúng tôi xét bài toán sau

$$\begin{cases} D_t^\alpha u - \Delta u = F(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,1), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in (0,1), \\ u(1,t) = 0, & t \in (0,1), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u(x,1) = u_1(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $D_t^\alpha u$ là đạo hàm theo nghĩa Caputo

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds. \tag{2}$$

Hàm $u_0, u_1 \in L^2(0,1)$ tương ứng cho giá trị của phân bố tại thời điểm ban đầu và thời điểm cuối. Hàm F được gọi là hàm nguồn. Bài toán xác định hàm nguồn ở đây được hiểu là

"*Cho trước u_0, u_1, ta xác định hàm nguồn F*".

Bài toán này là không chỉnh theo nghĩa Hadamard. Một sai số nhỏ ở dữ liệu u_0, u_1 có thể dẫn đến sai số lớn ở F. Hiện nay, đa số các kết quả chỉ khảo sát cho trường hợp F chỉ phụ thuộc vào một biến không gian (biến x). Các công trình sau khảo sát hàm nguồn $F = F(x)$.

- Năm 2013, J.G. Wang và cộng sự và J.G. Wang đã chỉnh hóa bài toán xác định hàm nguồn bằng phương pháp chặt cụt và phương pháp Tikhonov.
- Năm 2014, T. Wei và các cộng sự đã chỉnh hóa bài toán xác định hàm nguồn bằng phương pháp điều chỉnh tựa biên (modfied quasi-boundary value method).
- Năm 2016, Y.K. Ma và các đồng tác giả đã chỉnh hóa bài toán xác định hàm nguồn bằng phương pháp Tikhonov mở rộng (generalized Tikhonov method).

Các kết quả khi F phụ thuộc cả hai biến có dạng $F(x,t) = \varphi(t)f(x)$ còn hạn chế. Năm 2011, M. Kirane và S. Malik đã xem xét bài toán sau

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0+}(u(x,t) - u(x,0)) - u_{xx} = \varphi(t)f(x), & (x,t) \in (0,1)\times(0,1), \\ u(1,t) = 0, & t \in (0,1), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t), & t \in (0,1), \\ u(x,0) = u_0(x), u(x,1) = u_1(x), & x \in (0,1). \end{cases}$$

Dù các tác giả đã đưa ra một phương pháp tìm hàm f, nhưng bài toán chỉnh hóa vẫn chưa được khảo sát. Năm 2011, T.Wei và các đồng tác giả đã nghiên cứu trường hợp φ là hàm dương và không bị nhiễu. Mục tiêu của chương 2 là nghiên cứu bài toán trong trường hợp φ bị nhiễu và không nhất thiết là hàm dương.

Chủ đề 2. Bài toán ngược không gian (sideway fractional diffusion equation)

Chủ đề 2 được trình bày ở chương 3 của Luận án. Trong chương 3, chúng tôi chúng tôi xét bài toán khuếch tán với đạo hàm cấp không nguyên theo biến thời gian với nguồn phi tuyến trong nửa mặt phẳng trên (one-dimensional semi-infinite domain) như sau

$$\begin{cases} -au_x(x,t) = D_t^\gamma u(x,t) + F(x,t,u(x,t)), \quad x>0,\ t>0, \\ u(1,t) = g(t), \quad t \ge 0, \\ \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u(x,0) = 0, \quad t \ge 0, \end{cases} \tag{3}$$

với a là hằng số khuếch tán, F là hàm nguồn được định nghĩa sau. Đạo hàm cấp không nguyên $D_t^\gamma u(x,t)$ là đạo hàm Caputo bậc $0<\gamma\le 1$ được định nghĩa như sau

$$\begin{cases} D_t^\gamma u(x,t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \displaystyle\int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\alpha}, \quad \text{for } 0<\gamma<1, \\ D_t^\gamma u(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad \gamma = 1, \end{cases}$$

với $\Gamma(\cdot)$ là hàm Gamma. Mục tiêu của bài toán này là xác định $u(0,t)$ từ dữ liệu cho trước g. Bài toán (3) là bài toán ngược không chỉnh, nghĩa là nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ liệu đầu vào, và với sai số nhỏ ở dữ liệu đầu vào thì nghiệm của bài toán sẽ có sai số lớn. Bài toán thuần nhất, nghĩa là $F=0$, đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả, chẳng hạn như:

• Năm 2011, Zheng và Wei, xét bài toán khuếch tán thuần nhất, với đạo hàm cấp không nguyên theo biến thời gian được hiểu theo nghĩa Dzerbayshan-Caputo trong một phần tư mặt phẳng, có dạng

$$\begin{cases} -au_x(x,t) = D_t^{\gamma} u(x,t), \quad x > 0,\ t > 0, \\ u(1,t) = g(t), \quad t \geq 0, \\ \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u(x,0) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

• Năm 2012, Xiong và các cộng sự áp dụng phương pháp chỉnh hóa tối ưu để giải quyết bài toán này và đạt được sai số hội tụ tối ưu.

• Năm 2012, Hon cùng các cộng sự, xét bài toán này trong trường hợp hai chiều. Cùng năm này, Fu cùng các đồng tác giả đưa ra phương pháp chỉnh hóa mới để giải quyết bài toán này.

• Năm 2014, MingLi cùng các cộng sự, đưa ra một phương pháp năng lượng (dynamic method) mới cho việc chọn tham số chỉnh hóa bằng cách sử dụng phương pháp phổ.

Theo như chúng tôi được biết, bài toán ngược cho phương trình khuếch tán với đạo hàm cấp không nguyên vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Để giải quyết bài toán tuyến tính không thuần nhất và phi tuyến, chúng tôi sẽ đưa ra những kỹ thuật và phương pháp chỉnh hóa mới. Luận án được chia làm 3 chương.

- Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về hàm nguyên, đạo hàm Caputo, Hàm Mittag-Leffler và biến đổi Fourier.
- Chương 2 trình bày bài toán xác định hàm nguồn. Phương pháp sử dụng chính là phương pháp chặt cụt kết hợp với kĩ thuật biến đổi Fourier.
- Chương 3 trình bày bài toán ngược không gian. Hai phương pháp chỉnh hóa được áp dụng để đưa ra nghiệm xấp xỉ. Chúng tôi khảo sát sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này giới thiệu các kiến thức cơ sở cho kết quả của luận án, bao gồm các định nghĩa, tính chất, và các đánh giá quan trọng cho lớp hàm Mittag-Leffler, phép biến đổi Fourier, và hàm nguyên. Các nội dung này đóng vai trò cốt lõi trong quá trình xây dựng kỹ thuật nghiệm.

1.1 Đạo hàm cấp không nguyên Caputo

Trong luận án này chúng tôi chỉ xét đạo hàm cấp không nguyên theo Caputo.

Định nghĩa 1.1.1. Cho $0 < \alpha < 1$, đạo hàm Caputo cấp α không nguyên của hàm số f tại t được cho bởi

$$^{c}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial s} f(s)\,ds,$$

khi vế phải xác định.

1.2 Các hàm Mittag-Leffler

Định nghĩa 1.2.1. Cho α, β là các số dương. Hàm số $E_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, xác định bởi

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad z \in \mathbb{C},$$

được gọi làm hàm Mittag-Leffler tổng quát.

1.3 Phép biến đổi Fourier

Phép biến đổi Fourier được đặt tên theo nhà toán học người Pháp Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) với nhiều ứng dụng trong khoa học nói chung, và toán học nói riêng, mà đặc biệt là lĩnh vực xử lý tín hiệu với các Phương trình vi phân–đạo hàm riêng. Có thể mô tả bởi chu trình sau

$$\begin{tikzcd}
\text{Tín hiệu kỹ thuật} \arrow[r, "\text{Biến đổi Fourier}"] & \text{Tín hiệu tần số} \arrow[l, bend left, "\text{Biến đổi Fourier ngược}"]
\end{tikzcd}$$

Định nghĩa 1.3.1. Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$, hàm số $\mathscr{F}(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ định nghĩa bởi

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt,$$

được gọi là biến đổi Fourier của f.

Chương 2

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH HÀM NGUỒN CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN VỚI ĐẠO HÀM CẤP KHÔNG NGUYÊN

2.1 Giới thiệu bài toán

Trong chương này, chúng tôi khảo sát bài toán tìm hàm nguồn f cho mô hình khuếch tán sau

$$\begin{cases} D_t^\alpha u - \Delta u = \varphi(t) f(x), & (x,t) \in (0,1) \times (0,1), \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, & t \in (0,1), \\ u(1,t) = 0, & t \in (0,1), \\ u(x,0) = u_0(x), u(x,1) = u_1(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.1}$$

trong đó $\varphi \in C([0,1])$ và $u_0, u_1 \in L^2(0,1)$. Giả sử (φ, u_0, u_1) bị nhiễu bởi $(\varphi^\varepsilon, u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon)$ sao cho

$$\|\varphi - \varphi^\varepsilon\|_{C(0,1)} < \varepsilon, \ \|u_1 - u_1^\varepsilon\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon, \ \|u_0 - u_0^\varepsilon\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Lịch sử của bài toán này đã được giới thiệu chi tiết trong Phần Mở Đầu. Mục tiêu của chương này sẽ khảo sát các kết quả chỉnh hóa khi hàm $\varphi(t)$ bị nhiễu và không nhất thiết phải là hàm dương. Cụ thể, bằng cách đặt

$$NZ_\varphi = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq 0\},$$

ta sẽ nghiên cứu bài toán xác định hàm nguồn f trong trường hợp $NZ_\varphi \neq \mathbb{R}$. Luận án trình bày hai kết quả chính khi dữ liệu $\varphi(t)$ bị nhiễu. Kết quả thứ nhất giải quyết trường hợp hàm $\varphi(t)$ dương. Kết quả thứ hai giải quyết trường hợp hàm $\varphi(t)$ không nhất thiết dương. Kết quả chính của chương đã được công bố trên tạp chí có uy tín *Computer and Mathematics with Applications (SCI, Q1) [T1].*

2.2 Kết quả chỉnh hóa thứ nhất

Trong phần này, chúng tôi dùng phương pháp chặt cụt để đưa ra nghiệm chỉnh hóa trong trường hợp hàm φ là hàm dương trên $[0,1]$. Kết quả chính thứ nhất được thể hiện trong Định lý sau đây.

Định lý 2.2.1. *Cho* $u_0, u_1 \in L^2(0,1)$, $\varphi \in C(0,1)$ *và* (u,f) *là nghiệm chính xác của bài toán* (2.1). *Giả sử*

$$\varphi^\varepsilon(t) > C_0, \varphi(t) > C_0, \forall t \in (0,1),\ C_0 > 0. \tag{2.3}$$

Ta xét nghiệm chỉnh hóa f^ε *như sau*

$$f^\varepsilon(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} \frac{\int_0^1 u_1^\varepsilon(x)\cos(\omega x)dx - E_{\alpha,1}(-\omega^2)\int_0^1 u_0^\varepsilon(x)\cos(\omega x)dx}{\int_0^1 s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^2 s^\alpha)\varphi^\varepsilon(1-s)ds} e^{i\omega x}dx, \tag{2.4}$$

với $\omega_{max} := \omega_{max}(\varepsilon)$ *là tham số phụ thuộc* ε. *Chọn* ω_{max} *sao cho*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{\max}^{-1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega_{\max}^5\varepsilon^2 = 0.$$

Giả sử $f \in H^1(0,1)$. *Khi đó ta có*

$$\|f - 2f^\varepsilon\|_{L^2(0,1)}^2 \le \frac{6+4\sqrt{2}}{\pi}\|f\|_{H^1(0,1)}^2|\omega_{\max}|^{-2} + \frac{4}{\pi}C_1^2\varepsilon^2(1+\omega_{\max}^5). \tag{2.5}$$

2.3 Kết quả chỉnh hóa thứ hai

Trước tiên, ta đặt

$$\begin{aligned}\Phi^{\varepsilon}(\alpha,\omega) &= \int_0^1 s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^2 s^{\alpha})\varphi^{\varepsilon}(1-s)ds,\\ \Phi(\alpha,\omega) &= \int_0^1 s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\omega^2 s^{\alpha})\varphi(1-s)ds,\end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó $\varphi \in C([0,1])$. Tiếp theo, ta chứng minh các kết quả sau với φ không nhất thiết dương.

Bổ đề 2.3.1. *Cho q là hằng số sao cho $0 < q < \frac{1}{2}$, $\varphi \in C([0,1])$ và $M_{\varepsilon} = \frac{p\varepsilon}{\alpha} + \varepsilon^q$. Khi $\Phi(\alpha,\omega) \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ và ta đặt*

$$R_{\varepsilon} = \frac{1}{3}\frac{\ln(M_{\varepsilon}^{-1})}{\ln(\ln(M_{\varepsilon}^{-1}))}, \forall \varepsilon > 0. \tag{2.7}$$

thì theo độ đo Lebesgue của quả cầu

$$B(\varphi,\varepsilon) = \{\omega \in B(0,R_{\varepsilon}), |\Phi(\alpha,\omega)| \le M_{\varepsilon}\}, \tag{2.8}$$

và với $\frac{8}{6\pi R_{\varepsilon}^2}$ đủ nhỏ ($\forall \varepsilon > 0$, $B(0,R_{\varepsilon})$) là quả cầu mở trong $\mathbb{R}$.

Định lý 2.3.2. *Cho u_0, u_1 và f như Định lý 2.2.1. Đặt M_{ε} như Bổ đề (**??**), ta đưa ra nghiệm chỉnh hóa như sau*

$$f^{\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R_{\varepsilon}}^{R_{\varepsilon}} F^{\varepsilon}(\alpha,\omega)e^{i\omega x}d\omega, \tag{2.9}$$

với

$$F^{\varepsilon}(\alpha,\omega) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^1 u_1^{\varepsilon}(x)\cos(\omega x)dx - E_{\alpha,1}(-\omega^2)\int_0^1 u_0^{\varepsilon}(x)\cos(\omega x)dx}{\phi^{\varepsilon}(\alpha,\omega)}, & |\Phi^{\varepsilon}(\alpha,\omega)| \ge \varepsilon^q \wedge |\omega| < R_{\varepsilon},\\ 0, \quad |\Phi^{\varepsilon}(\alpha,\omega)| < \varepsilon^q \vee |\omega| \ge R_{\varepsilon}, & \end{cases} \tag{2.10}$$

với $0 < q < \frac{1}{2}$. *Nếu* ε *đủ nhỏ trong khoảng* $\left(0, \left(\frac{\alpha}{2P}\right)^{\frac{1}{1-q}}\right)$, *ta có đánh giá như sau:*

$$\|f - 2f^{\varepsilon}\|^2_{L^2(0,1)} \leq \frac{4+3\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}}\|f\|^2_{H^1(0,1)} \frac{\ln^2\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon^q+\frac{\varepsilon P}{\alpha}}\right)\right)}{\ln^2\left(\frac{1}{\varepsilon^q+\frac{\varepsilon P}{\alpha}}\right)} + \frac{8\sqrt{2}\|f\|^2_{L^2(0,1)}}{3\pi\sqrt{\pi}} \frac{\ln^2\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon^q+\frac{\varepsilon P}{\alpha}}\right)\right)}{\ln^2\left(\frac{1}{\varepsilon^q+\frac{\varepsilon P}{\alpha}}\right)}$$
$$+ \frac{\sqrt{8}C_2}{\sqrt{\pi}\ln\left(\ln\left(\frac{\alpha}{(P+\alpha)\varepsilon^q}\right)\right)} \ln\left(\frac{\alpha}{(P+\alpha)\varepsilon}\right)\varepsilon^{2-4q}. \tag{2.11}$$

Chú ý 2.3.3. *Dễ thấy*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln^2\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon^q+\frac{\varepsilon P}{\alpha}}\right)\right)}{\ln^2\left(\frac{1}{\varepsilon^q+\frac{\varepsilon P}{\alpha}}\right)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\alpha}{(P+\alpha)\varepsilon}\right)\varepsilon^{2-4q}}{\sqrt{\pi}\ln\left(\ln\left(\frac{\alpha}{(P+\alpha)\varepsilon^q}\right)\right)} = 0. \tag{2.12}$$

2.4 Kết luận chương 2

Chương này chúng tôi giải quyết các vấn đề sau:

- Dùng phương pháp chặt cụt để đưa ra nghiệm chỉnh hóa trong trường hợp hàm φ là hàm dương trên $[0, 1]$ (Định lí 2.2.1).
- Giải quyết trường hợp hàm $\varphi(t)$ không nhất thiết dương, chúng tôi đưa ra dạng nghiệm chỉnh hóa và đưa ra đánh giá sai số hội tụ (Định lí 2.3.2).

Chương 3

BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN PHI TUYẾN VỚI ĐẠO HÀM CẤP KHÔNG NGUYÊN

Trong chương này, chúng tôi khảo sát bài toán phi tuyến sau

$$\begin{cases} -au_x(x,t) = D_t^\gamma u(x,t) + F(x,t,u(x,t)), \quad x>0,\ t>0, \\ u(1,t) = g(t), \quad t \ge 0, \\ \lim_{x\to+\infty} u(x,t) = u(x,0) = 0, \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Nội dung chính của chương là xét bài toán ngược, tức là xác định $u(0,t)$ khi biết $u(1,t) = g(t)$. Chương này gồm hai kết quả chính.

- Kết quả thứ nhất liên quan đến hàm nguồn dạng

  $$F(x,t,u) = b(x,t)u(x,t) + H(x,t), \tag{3.2}$$

  với $b \in L^\infty(0,1;L^2(\mathbb{R}))$ thỏa $\|b\|_{L^\infty(0,1;L^2(\mathbb{R}))} \le K$, với mỗi số thực $K \ge 0$ và $H \in L^2(0,1;L^2(\mathbb{R}))$.

- Kết quả chỉnh hóa thứ hai liên quan đến hàm $F:\mathbb{R}\times[0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, thỏa $F(x,t,0) = 0$ và

  $$|F(x,t,u_1) - F(x,t,u_2)| \le K|u_1 - u_2|, \tag{3.3}$$

  với hằng số $K > 0$ không phụ thuộc vào x, t, u_1, u_2. Kết quả của chương này được công bố trên tạp chí *Computational and Applied Mathematics, (SCIE,* *Q2) [T2]* và *Electronic Journal of Differential Equations, (SCIE, Q2) [T3].*

3.1 Dạng nghiệm của bài toán phi tuyến

Để tìm công thức nghiệm cho (3.1), ta phải sử dụng biến đổi Fourier. Chúng tôi mở rộng các hàm $u(x,t)$, $g(t)$ trên toàn miền $-\infty < t < +\infty$ bằng cách định nghĩa chúng bằng 0 với $t < 0$. Biến đổi Fourier của hàm $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ được viết như sau

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \qquad -\infty < \omega < +\infty. \tag{3.4}$$

Lấy biến đổi Fourier theo t của (3.1), ta được

$$\begin{cases} \widehat{u_x}(x,\omega) + \frac{(i\omega)^\gamma}{a} \hat{u}(x,\omega) = \frac{1}{a}\widehat{F}(x,\omega,u(x,\omega)), & x > 0,\ \omega \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(1,\omega) = \hat{g}(\omega), & \omega \ge 0, \\ \lim_{x\to+\infty} \hat{u}(x,\omega) = 0, & \omega \ge 0, \end{cases}$$

trong đó

$$(i\omega)^\gamma = |\omega|^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2} + i|\omega|^\gamma \operatorname{sign}(\omega) \sin\frac{\gamma\pi}{2}, \tag{3.5}$$

với $\operatorname{sign}(w)$ là dấu của w và $\widehat{F}(x,\omega,u(x,\omega))$ cho bởi

$$\widehat{F}(x,\omega,u(x,\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t,u(x,t)) e^{-i\omega t} dt. \tag{3.6}$$

Nghiệm của bài toán (3.1) được cho bởi phương trình tích phân phi tuyến sau

$$\begin{aligned} \widehat{u}(x,\omega) = {} & \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (1-x)}{a}\Big)\widehat{g}(\omega) \\ & - \frac{1}{a}\int_x^1 \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\Big)\widehat{F}(z,\omega,u(z,\omega))dz. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Sử dụng biến đổi Fourier ngược, ta được

$$\begin{aligned} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (1-x)}{a}\Big) \widehat{g}(\omega) \\ - \frac{1}{a} \int_x^1 \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\Big) \widehat{F}(z,\omega,u(z,\omega))\, dz \Big] e^{i\omega t}\, d\omega. \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2 Tính không chỉnh của bài toán phi tuyến

Ta xét g_n và F_0 là các hàm với biến đổi Fourier như sau:

$$\widehat{g_n}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega \in \mathbb{R} \backslash W_n, \\ \frac{1}{\sqrt{2}n}, & \text{if } \omega \in W_n, \end{cases} \tag{3.9}$$

và

$$\widehat{F_0}(z,\omega,u(z,\omega)) = \frac{a\widehat{u}(z,\omega)}{2\exp(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2})}, \tag{3.10}$$

với $W_n \subset \mathbb{R}$ và

$$W_n := \big\{\omega \in \mathbb{R} |\ n-1 \le \omega \le n+1\big\}.$$

Xét phương trình tích phân sau

$$\begin{aligned} u_n(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (1-x)}{a}\Big) \widehat{g}_n(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \\ - \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^1 \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\Big) \widehat{F_0}(z,\omega,u_n(z,\omega)) e^{i\omega t} dz\, d\omega. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Trước tiên, chúng tôi chỉ ra (3.11) có duy nhất nghiệm $u_n \in C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$. Thật vậy, chúng tôi xét hàm sau

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(w)(x,t) = \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \int_{n-1}^{n+1} \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (1-x)}{a}\Big) e^{i\omega t}\, d\omega \\ - \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^1 \exp\Big(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\Big) \widehat{F_0}(z,\omega,w(z,\omega)) e^{i\omega t} dz\, d\omega. \end{aligned}$$

Cho bất kỳ $w_1, w_2 \in C([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$. Khi đó, ta có

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{Q}(w_1)(x,\cdot) - \tilde{Q}(w_2)(x,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\widehat{\tilde{Q}}(w_1)(x,\cdot) - \widehat{\tilde{Q}}(w_2)(x,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \int_x^1 \frac{\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\right)}{\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)} \left(\widehat{w_1} - \widehat{w_2}\right) dz \Big|^2 d\omega \\
&\le \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (1-x) \int_x^1 \Big| \frac{\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\right)}{\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)} \left(\widehat{w_1} - \widehat{w_2}\right) \Big|^2 dz\, d\omega \\
&\le \frac{1}{2} |||w_1 - w_2|||^2,
\end{aligned}
$$

với $|||\cdot|||$ là chuẩn sup trong $L^2(\mathbb{R})$. Điều này cho thấy $\widetilde{Q}$ là ánh xạ co. Sử dụng định lý điểm bất động Banach, chúng ta kết luận rằng phương trình $\widetilde{Q}(w) = w$ có nghiệm duy nhất $u_n \in C([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$. Sử dụng bất đẳng thức $|c-d| \ge |c| - |d|$, ta được

$$
\begin{aligned}
|\widehat{u_n}(x,\omega)| \ge &\left| \exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma (1-x)}{a}\right) \widehat{g}_n(\omega) \right| \\
&- \left| \frac{1}{a} \int_x^1 \exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\right) \widehat{F_0}(z,\omega,u_n(z,\omega))\, dz \right|.
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Ta lại có

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{a} \int_x^1 \exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\right) \widehat{F_0}(z,\omega,u_n(z,\omega))\, dz \right| \\
&\le \frac{1}{a} \int_x^1 \left| \exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma (z-x)}{a}\right) \right| \left| \frac{\widehat{u}_n(z,\omega)}{\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma \cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)} \right| dz \\
&\le \frac{1}{a} \int_x^1 |\widehat{u}_n(z,\omega)|\, dz.
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Kết hợp (3.12), (3.13) và dùng bất đẳng thức $2(c^2 + d^2) \ge (c+d)^2$, ta được

$$
\begin{aligned}
2|\widehat{u_n}(x,\omega)|^2 &+ \frac{2}{a^2} \int_x^1 \left| \widehat{u}_n(z,\omega) \right|^2 dz \\
&\ge \exp\left(\frac{2}{a}|\omega|^\gamma (1-x) \cos\frac{\gamma\pi}{2}\right) |\widehat{g}_n(\omega)|^2.
\end{aligned}
$$

Lấy tích phân trên $\mathbb{R}$ theo biến ω, ta thu được

$$
\begin{aligned}
2\|\widehat{u_n}(x,\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} &+ \frac{2}{a^2} \int_x^1 \|\widehat{u_n}(z,\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\, dz \\
&\ge \frac{1}{2n^2} \int_{n-1}^{n+1} \exp\left(\frac{2}{a}|\omega|^\gamma (1-x) \cos\frac{\gamma\pi}{2}\right) d\omega.
\end{aligned}
$$

Với tính toán đơn giản, ta có được

$$\left(2+\frac{2}{a^2}\right)\sup_{0\le x\le 1}\|\widehat{u_n}(x,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \ge \sup_{0\le x\le 1}\frac{\exp\left(2\frac{1}{a}(n-1)^\gamma(1-x)\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}{n^2}$$
$$= \frac{\exp\left(2\frac{1}{a}(n-1)^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}{n^2}.$$

Từ (3.9), sử dụng đẳng thức Parseval, ta thấy

$$\|g_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\widehat{g}_n(\omega)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\omega\in W_n}\frac{1}{2n^2}d\omega = \frac{1}{n^2}. \quad (3.14)$$

Khi $n\to+\infty$, dễ dàng thấy rằng

$$\|g_n\|_{L^2(\mathbb{R})}\to 0, \qquad \sup_{0\le x\le 1}\|\widehat{u_n}(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}\to+\infty. \quad (3.15)$$

Vì vậy, bài toán (3.8) là không chỉnh theo nghĩa Hadamard với chuẩn L^2.

3.3 Kết quả chỉnh hóa thứ nhất

Giả sử rằng dữ liệu đo đạc $g_\alpha\in L^2(\mathbb{R})$ thỏa

$$\|g_\alpha - g\|_{L^2(\mathbb{R})}\le\alpha. \quad (3.16)$$

Trong phần này, F thỏa (3.2). Dễ thấy rằng F thỏa điều kiện Lispchitz toàn cục, nghĩa là

$$\|F(x,\cdot,u_1)-F(x,\cdot,u_2)\|_{L^2(\mathbb{R})}\le K\|u_1(x,\cdot)-u_2(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (3.17)$$

Ta thấy $(i\omega)^\gamma$ có phần thực dương $|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}$. Hơn nữa, dễ thấy

$$\left|\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(1-x)}{a}\right)\right| = \exp\left(|\omega|^\gamma\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\frac{1-x}{a}\right), \quad (3.18)$$

và

$$\left|\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(z-x)}{a}\right)\right| = \exp\left(|\omega|^\gamma\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)\frac{z-x}{a}\right). \quad (3.19)$$

Từ đó, ta có nhận xét rằng, với $0\le z<x<1$, $\left|\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(1-x)}{a}\right)\right|$ và $\left|\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(z-x)}{a}\right)\right|$ tiến tới ∞ khi $\omega\to+\infty$. Đây là nguyên nhân gây ra tính không chỉnh của bài toán.

Để chỉnh hóa bài toán, chúng ta phải thay thế hai thành phần $\exp\left(\frac{1-x}{a}(i\omega)^\gamma\right)$ và $\exp\left(\frac{z-x}{a}(i\omega)^\gamma\right)$ bằng những thành phần khác.

Định lý 3.3.1. *Giả sử bài toán* (3.1) *có nghiệm duy nhất* $u \in C([0,1]; L^2(\mathbb{R}))$ *sao cho*

$$\|u(\cdot,0)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le E. \tag{3.20}$$

Giả sử rằng $2K < a$. *Chọn* $\varepsilon := \varepsilon(\alpha) > 0$ *thỏa mãn*

$$\lim_{\alpha\to 0}\varepsilon(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha\to 0}\alpha\varepsilon^{-1}(\alpha) \text{ bị chặn.} \tag{3.21}$$

Khi đó, ta thiết lập được một nghiệm chỉnh hóa U_ε^α *sao cho*

$$\|u(x,\cdot) - U_\varepsilon^\alpha(x,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \sqrt{\frac{2(1+p)}{1-2(1+\frac{1}{p})\frac{K^2}{a^2}}}\left(\varepsilon^{-1}\alpha + \|u(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}\right)\varepsilon^x, \tag{3.22}$$

với mỗi $p > 1/(\frac{a^2}{2K^2} - 1)$. *Ở đây* U_ε^α *là hàm mà biến đổi Fourier của nó thỏa*

$$\begin{aligned}\widehat{U_\varepsilon^\alpha}(x,\omega) &= \frac{\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(1-x)}{a}\right)}{1+\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}\widehat{g_\alpha}(\omega)\\ &\quad - \frac{1}{a}\int_x^1 \frac{\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(z-x)}{a}\right)}{1+\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}\widehat{F}(z,\omega,U_\varepsilon^\alpha(z,\omega))dz\\ &\quad + \frac{1}{a}\int_0^x \frac{\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}{1+\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}\\ &\quad \times\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(z-x)}{a}\right)\widehat{F}(z,\omega,U_\varepsilon^\alpha(z,\omega))dz.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Chú ý 3.3.2. *Trong định lý trên, chúng ta có thể chọn* $\varepsilon(\alpha) := \alpha$.

3.4 Kết quả chỉnh hóa thứ hai

Ta xét bài toán chỉnh hóa sau đây

$$\begin{cases} \widehat{(u_\varepsilon^\alpha)_x}(x,\omega) + \dfrac{(i\omega)^\gamma}{a}\widehat{u_\varepsilon^\alpha}(x,\omega) = \dfrac{P(\varepsilon,\omega)}{a}\widehat{F}(x,\omega,u_\varepsilon^\alpha(x,\omega)), & (x,\omega) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty), \\ \widehat{u_\varepsilon^\alpha}(1,\omega) = P(\varepsilon,\omega)\widehat{g}_\alpha(\omega), & \omega \in (0,+\infty), \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \widehat{u_\varepsilon^\alpha}(x,\omega) = 0, & (x,\omega) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty), \end{cases} \tag{3.24}$$

trong đó $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ là tham số chỉnh hóa thỏa mãn $\lim\limits_{\alpha\to 0}\varepsilon(\alpha) = 0$ và

$$P(\varepsilon,\omega) = \frac{1}{1+\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}.$$

Bằng phương pháp tương tự, chúng tôi đưa ra công thức cho nghiệm của bài toán (3.24) như sau

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^\alpha(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(1-x)}{a}\right)}{1+\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}\widehat{g}_\alpha(\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &\quad - \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_x^1 \frac{\exp\left(\frac{(i\omega)^\gamma(z-x)}{a}\right)}{1+\varepsilon\exp\left(\frac{1}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}\right)}\widehat{F}(z,\omega,u_\varepsilon^\alpha(z,\omega))e^{i\omega t}dzd\omega. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Bây giờ, ta đi đến kết quả chính của bài toán.

Định lý 3.4.1. *Bài toán* (3.24) *có nghiệm duy nhất* $u_\varepsilon^\alpha \in C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$, *trong đó không gian* $C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$ *chứa các hàm liên tục* $u:[0,1]\to L^2(\mathbb{R})$. *Giả sử bài toán* (3.1) *có nghiệm duy nhất* $u \in C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$ *thỏa*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}x\right)|\widehat{u}(x,\omega)|^2 d\omega < \infty. \tag{3.26}$$

Chọn $\varepsilon := \varepsilon(\alpha)$ *sao cho*

$$\lim_{\alpha\to 0}\varepsilon = \lim_{\alpha\to 0}\varepsilon\alpha^{-1} = 0. \tag{3.27}$$

Khi đó, ta có đánh giá sau với mọi $x \in (0,1)$

$$\| u(x,\cdot) - u_\varepsilon^\alpha(x,\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R})}$$
$$\leq \sqrt{3}\exp\left(\frac{3(1-x)^2K^2}{2a^2}\right)\left[\sqrt{\sup_{0\leq x\leq 1}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{2}{a}|\omega|^\gamma\cos\frac{\gamma\pi}{2}x\right)|\widehat{u}(x,\omega)|^2 d\omega + \varepsilon^{-1}\alpha}\right]\varepsilon^x. \tag{3.28}$$

3.5 Kết luận chương 3

Trong chương này, chúng tôi thiết lập dạng nghiệm của bài toán (3.1) và chứng minh rằng đây là bài toán không chỉnh. Chúng tôi đưa ra hai kết quả chính sau:

- Dùng nghiệm chỉnh hóa được định nghĩa như (3.23), ta đưa ra đánh giá sai số có bậc Hölder dạng e^x, $x \in (0,1]$ (Định lí 3.3.1).
- Bằng kĩ thuật mới, chúng tôi thiết lập bài toán chỉnh hóa được cho như (3.24), chứng minh tồn tại duy nhất nghiệm và sai số hội tụ được cung cấp trong Định lí 3.4.1.

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

I. Kết luận chung

Trong luận án này, chúng tôi đưa ra được các kết quả sau:

Một là, khảo sát toán xác định hàm nguồn f cho mô hình khuếch tán (2.1). Với dữ liệu $\varphi(t)$ bị nhiễu, chúng tôi xét cả hai trường hợp hàm của hàm $\varphi(t)$ là dương trên đoạn $[0,1]$ và không nhất thiết dương. Kết quả đánh giá sai số hội tụ được đưa ra trong từng trường hợp.

Hai là, khảo sát bài toán ngược không gian như (3.1), bằng các kĩ thuật phù hợp, chúng tôi thiết lập hai dạng nghiệm chỉnh hóa (3.23) và (3.25), các kết quả về tính tồn tại duy nhất của các nghiệm chỉnh hóa, sai số hội tụ được cung cấp.

Kết quả chính của luận án đã được công bố trên ba bài báo quốc tế có uy tín (01 SCI và 02 SCIE).

II. Kiến nghị

Trong thời gian tới chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Tiếp tục nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng ngược thời gian với đạo hàm cấp không nguyên.

2. Nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng với đạo hàm cấp không nguyên có yếu tố ngẫu nhiên.

3. Nghiên cứu các bài toán phương trình đạo hàm riêng với một số loại đạo hàm cấp không nguyên khác nhau.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[T1] Nguyen Huy Tuan, Mokhtar Kirane, **Luu Vu Cam Hoan,** Le Dinh Long, (2017), "Identification and regularization for unknown source for a time-fractional diffusion equation", *Computers & Mathematics with Applications,* 73 (2017), No. 6, 931–950 (SCI, Q1)

[T2] Nguyen Huy Tuan, **Luu Vu Cam Hoan,** Tatar, Salih, (2019), "An inverse problem for an inhomogeneous time-fractional diffusion equation: a regularization method and error estimate", *Computational* & *Applied Mathematics,* Vol. 38, Issue: 2. (SCIE, Q2)

[T3] Nguyen Huy Tuan, Mokhtar Kirane, **Luu Vu Cam Hoan,** Bin-Mohsin, Bandar, (2016), "A regularization method for time-fractional linear inverse diffusion problems", *Electron. J. Differential Equations,* No. 290, 18 pp. (SCIE, Q2)

[T4] **Luu Vu Cam Hoan,** Ho Duy Binh, Tran Bao Ngoc, (2018), "A truncation regularization method for a time fractional diffusion equation with an inhomogeneous source", *ITM Web of Conferences,* 20, 02007.

Hội nghị khoa học đã tham gia: *Hội Nghị Toán học Miền Trung và Tây Nguyên lần II,* Đà Lạt 09-11/12/2017. *International Conference on Mathematics (ICM, 2018),* Trường Đại học Tôn Đức Thắng 18/12/2018.