Mở đầu

Lý thuyết về phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình vi tích phân là một trong những lĩnh vực cơ bản của Giải tích toán học. Phương trình vi phân được hiểu là một phương trình có chứa hàm chưa biết (còn gọi là ẩn hàm) cùng với các đạo hàm của ẩn hàm đó (đạo hàm thường hay đạo hàm riêng), có thể chứa cả các biến độc lập của ẩn hàm. Nếu ẩn hàm là hàm một biến thì người ta gọi phương trình đó là phương trình vi phân thường, ngược lại, nhiều hơn một biến thì nó được gọi là phương trình vi phân đạo hàm riêng, hay nói gọn là phương trình đạo hàm riêng. Cấp của phương trình vi phân chính là cấp cao nhất của đạo hàm của ẩn hàm (đạo hàm thường hay đạo hàm riêng) xuất hiện trong phương trình. Phương trình tích phân, phương trình vi tích phân cũng được hiểu tương tự. Phương trình vi tích phân không chỉ có chứa đạo hàm (có thể có đạo hàm riêng) mà còn có chứa cả tích phân (theo loại tích phân nào đó) mà dưới dấu tích phân có chứa các biến độc lập, biến lấy tích phân, ẩn hàm cùng với các đạo hàm của ẩn hàm đó. Phương trình vi phân, phương trình vi tích phân đóng vai trò quan trọng trong khoa học kỹ thuật và cả trong thực tế đời sống. Các phương trình này thường mô tả các hiện tượng xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau: hóa học, sinh học, sinh thái học, vật lý học, cơ học,$\cdots$ (xem [C. Corduneanu, *Integral equations and applications*, Cambridge University Press, NewYork, 1991], [K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer Verlag, 1985] và các tài liệu trích dẫn trong đó.

Do tính ứng dụng, do bản chất toán học chứa đựng trong các kết quả đạt được từ việc nghiên cứu các mô hình thực tế, ngay từ những công trình đầu tiên mô tả các mô hình của vật lý học, cơ học,$\cdots$ mà phương trình vi phân, phương trình vi tích phân từ trước cho đến nay đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của các nhà khoa học. Đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về tính giải được, nghĩa là nghiên cứu sự tồn tại hoặc không tồn tại nghiệm của phương trình, và nghiên cứu các tính chất có thể có của nghiệm kể cả nghiên cứu cấu trúc của tập nghiệm, (xem [C. Avramescu, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. **5** (2003) 1-15], [T. A. Burton, Appl. Math. Letters, **11** (1) (1998) 85-88], [T. A. Burton, C. Kirk, Math. Nach. 189 (1998) 23-31], [S. Park, Vietnam J. Math. **27** (1999) 187-222] và các tài liệu trích dẫn liệt kê trong đó). Thực tế cho thấy rằng, có nhiều dạng phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình vi tích phân khác nhau và không có một phương pháp chung nào để giải tất cả các phương trình đó. Chính vì thế, đề tài nghiên cứu của luận án là cần thiết, có ý nghĩa lý luận và thực tiễn.

Tiếp nối các kết quả đã có cho phương trình vi tích phân, trong luận án này chúng tôi nghiên cứu các phương trình vi tích phân cấp 1, cấp m ($m \geq 2$) và cấp $m+n$ nhận giá trị trong không gian Banach lần lượt theo 3 dạng sẽ được nêu ra ở dưới đây, các kết quả thu được là mới liên quan đến sự tồn tại nghiệm và các tính chất của nghiệm cho các phương trình.

Dạng 1

$$u(x) = g(x) + \int_{B_x} H(x,y,u(y),D_1u(y))dy + \int_{\Omega} K(x,y,u(y),D_1u(y))dy. \tag{0.1}$$

Dạng 2

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_{\Omega} H(x,y,u(y),D_1u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy \\ &+ \int_{\Omega} K(x,y,u(y),D_1u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Dạng 3

$$u(x) = g(x) + \int_{\Omega} H(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy + \int_{\Omega} K(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy. \tag{0.3}$$

Các dạng phương trình này và các dạng phương trình tương tự đã được nhiều tác giả nghiên cứu bằng phương pháp điểm bất động kết hợp các công cụ thích hợp của giải tích hàm phi tuyến (xem [B. C. Dhage, S. K. Ntouyas, Nonlinear Studies, **9** (2002) 307-317], [L. T. P. Ngoc, N. T. Long, Nonlinear Anal. TMA. **74** (11) (2011) 3769-3774], và các tài liệu tham khảo có liệt kê trong đó).

Trong [A. M. Bica et al., J. Inequal. Pure and Appl. Math. **7** (5) (2006), Art. 173], sử dụng Định lý điểm bất động Perov, Bica và các cộng sự đã chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm và các tính chất khác của nghiệm cho phương trình vi tích phân Fredholm cấp 1 nhận giá trị trong không gian Banach E tùy ý như sau

$$x(t) = g(t) + \int_a^b f(t, s, x(s), x'(s))ds, \; t \in [a, b], \tag{0.4}$$

trong đó $f : [a, b] \times [a, b] \times E \times E \to E$ liên tục và $g \in C^1([a, b]; E)$ là các hàm cho trước.

Trong [B. G. Pachpatte, Tamkang J. Math. **39** (1) (2008) 85-94], B. G. Pachpatte đã nghiên cứu phương trình vi tích phân phi tuyến kiểu Fredholm cấp $n-1$ có dạng như sau

$$x(t) = g(t) + \int_a^b f(t, s, x(s), x'(s), \cdots, x^{(n-1)}(s))ds, \; t \in I = [a, b], \tag{0.5}$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ và x, g, f là các hàm nhận giá trị thực. Giả sử $g \in C(I; \mathbb{R})$, $f \in C(I^2 \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, là các hàm khả vi liên tục đến cấp $n-1$ theo t trên tập xác định tương ứng của chúng. Với các giả thiết được xây dựng cho các hàm g, f cho trước, B. G. Pachpatte đã nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất và các tính chất khác của nghiệm cho phương trình vi tích phân (0.5). Trước hết, bằng cách biến đổi phương trình đã cho về phương trình điểm bất động $x = Tx$ với toán tử $T : S \to S$ và S là một không gian Banach được xây dựng dựa trên một chuẩn kiểu Bielecki (tức là một loại chuẩn có trọng), tác giả đã chứng minh được $T : S \to S$ là ánh xạ co, từ đó thu được sự tồn tại duy nhất nghiệm của phương trình. Tiếp theo, sử dụng một bất đẳng thức tích phân có đánh giá nghiệm tường minh, tác giả cũng đã thu được các tính chất khác của nghiệm của (0.5) như tính duy nhất (nhiều nhất một nghiệm), sự phụ thuộc liên tục của nghiệm và chỉ ra được các đánh giá của nghiệm theo các hàm cho trước với các điều kiện thích hợp. Chi tiết về xây dựng không gian Banach S trong [B. G. Pachpatte, Tamkang J. Math. **39** (1) (2008) 85-94] như sau: Với $\lambda > 0$ là hằng số dương cho trước, xét không gian $S = \{u \in C^{n-1}(I; \mathbb{R}) : \sup_{t \in I} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \left| u^{(j)}(t) \right| < +\infty\}$ được trang bị một chuẩn kiểu Bielecki như sau $\|u\|_S = \sup_{t \in I} e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \left| u^{(j)}(t) \right|$, $u \in S$, thế thì $(S, \|\cdot\|_S)$ là không gian Banach.

Trong [B. G. Pachpatte, Differential Equations & Applications, **1** (1) (2009) 27-39], B. G. Pachpatte tiếp tục nghiên cứu phương trình vi tích phân kiểu Fredholm theo hai biến như sau:

$$u(x, y) = f(x, y) + \int_0^a \int_0^b g\left(x, y, s, t, u(s, t), D_1 u(s, t), D_2 u(s, t)\right) dt ds, \tag{0.6}$$

trong đó $(x, y) \in \Delta = [0, a] \times [0, b]$, $a > 0$, $b > 0$, f, g là các hàm cho trước; u là ẩn hàm và $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial x}$, $D_2 u = \frac{\partial u}{\partial y}$ lần lượt chỉ đạo hàm riêng cấp một của hàm $u\left(x, y\right)$, $(x, y) \in \Delta$, tương ứng theo biến thứ nhất và biến thứ hai, ở đây, trước hết các hàm f, g cho trước được giả sử thỏa điều kiện $f \in C^1(\Delta; \mathbb{R})$, $g \in C(\Delta^2 \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ và $D_i g \in C(\Delta^2 \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Đối với dạng phương trình vi tích phân theo hai biến này, các phương pháp và kỹ thuật được sử dụng trong [B. G. Pachpatte, Tamkang J. Math. **39** (1) (2008) 85-94] đã được cải tiến để thu được các kết quả tương tự về sự tồn tại duy nhất nghiệm và một số tính chất của nghiệm cho (0.6). Đặc biệt, kỹ thuật xây dựng không gian Banach E dựa trên cách chọn chuẩn kiểu Bielecki đã được tác giả cải tiến một cách thích hợp tương ứng với dạng của phương trình (0.6). Không gian Banach $E = \{u \in C^1(\Delta; \mathbb{R}) : \sup_{(x,y) \in \Delta} e^{-\lambda(x+y)} \left(\left|u\left(x, y\right)\right| + \left|D_1 u\left(x, y\right)\right| + \left|D_2 u\left(x, y\right)\right|\right) < +\infty\}$, với chuẩn $\|\cdot\|_E$ (kiểu Bielecki) được xây dựng trong [B. G. Pachpatte, Differential Equations & Appl. **1** (1) (2009) 27-39] cho bởi: $\|u\|_E = \sup_{(x,y) \in \Delta} e^{-\lambda(x+y)} \left(\left|u\left(x, y\right)\right| + \left|D_1 u\left(x, y\right)\right| + \left|D_2 u\left(x, y\right)\right|\right)$, trong đó $\lambda > 0$ là hằng số cho trước.

Trong [A. Aghajani et al., Mathematica Slovaca, **66** (2016) 1207-1216], A. Aghajani và các cộng sự đã chứng minh một số kết quả về sự tồn tại, duy nhất và đánh giá của các nghiệm của phương trình vi tích phân kiểu Fredholm theo hai biến như sau, bằng cách sử dụng định lý điểm bất động Perov,

$$u(x,y) = f(x,y) + \int_a^b \int_c^d g\left(x,y,s,t,u(s,t),D_1u(s,t),D_2u(s,t)\right) dtds. \tag{0.7}$$

Trong [N. Lungu, I. A. Rus, J. Math. Inequalities, **3** (4) (2009) 519-527], Lungu và Rus thiết lập một số kết quả liên quan đến sự tồn tại, duy nhất, các bất đẳng thức tích phân và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào các dữ liệu cho trước của phương trình tích phân kiểu Volterra-Fredholm dưới đây theo hai biến trong một không gian Banach nhờ vào kỹ thuật toán tử Picard

$$u(x,y) = g(x,y,h(u)(x,y)) + \int_0^x \int_0^y K\left(x,y,s,t,u(s,t)\right) dsdt,\ (x,y) \in \mathbb{R}_+^2. \tag{0.8}$$

Áp dụng một định lý điểm bất động kiểu Krasnosel'skii và với các giả thiết thích hợp, Purnaras [I. K. Purnaras, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. **17** (2006) pp.1-24] đã thu được một số kết quả về sự tồn tại nghiệm cho phương trình tích phân hàm phi tuyến

$$x(t) = Q(t) + \int_0^{\mu(t)} k(t,s)f(s,x(\theta(s)))ds + \int_0^{\sigma(t)} v(t,s)g(s,x(\eta(s)))ds,\ t \in [0,1], \tag{0.9}$$

trong đó $E = \mathbb{R}$, $0 \le \mu(t) \le t$; $0 \le \sigma(t) \le t$; $0 \le \theta(t) \le t$; $0 \le \eta(t) \le t$, với mọi $t \in [0,1]$.

Trong [C. Avramescu, C. Vladimirescu, Electronic J. Qualitative Theory of Diff. Equ. **25** (2005) 1-6], sử dụng một định lý điểm bất động kiểu Krasnosel'skii, Avramescu và Vladimirescu đã chứng minh sự tồn tại nghiệm ổn định tiệm cận cho phương trình

$$x(t) = q(t) + \int_0^t K(t,s,x(s))ds + \int_0^\infty G(t,s,x(s))ds,\ t \ge 0, \tag{0.10}$$

trong đó các hàm q, K, G là các hàm liên tục cho trước, nhận giá trị trong không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^p$ và thỏa các điều kiện phù hợp.

Purnaras cũng cho thấy các kỹ thuật được sử dụng trong [I. K. Purnaras, Nonlinear Anal. TMA. **71** (2009) 3914-3933] có thể được áp dụng để thu được kết quả tồn tại nghiệm cho phương trình sau

$$\begin{aligned} x(t) &= q(t) + \int_{\alpha(t)}^{\mu(t)} k(t,s) f\left(s, x(\theta(s))\right) ds \\ &\quad + \int_{\beta(t)}^{\lambda(t)} \widehat{k}(t,s) F\left(s, x(\nu(s)), \int_0^{\sigma(s)} k_0\left(s,v,x(\eta(v))\right) dv\right) ds,\ t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{0.11}$$

Trong trường hợp phương trình nhận giá trị trong không gian Banach E tùy ý, sự tồn tại của nghiệm ổn định tiệm cận của phương trình

$$\begin{aligned} x(t) &= q(t) + f(t,x(t)) + \int_0^t V\left(t,s,x(s), \int_0^s V_1\left(t,s,r,x(r)\right) dr\right) ds \\ &\quad + \int_0^\infty G\left(t,s,x(s), \int_0^s G_1\left(t,s,r,x(r)\right) dr\right) ds, \end{aligned} \tag{0.12}$$

$t \ge 0$, đã được chứng minh trong [L. T. P. Ngoc, N. T. Long, Nonlinear Anal. TMA. **74** (18) (2011) 7111-7125], bằng cách xây dựng một không gian Fréchet dựa trên khái niệm nửa chuẩn và sử dụng một định lý điểm bất động kiểu Krasnosel'skii trong không gian Fréchet.

Gần đây, trong [P. H. Danh et al., Results in Math. **71** (1) (2017) 251-281], các tác giả Danh, Dung, Long, Ngọc đã xét các phương trình vi tích phân phi tuyến theo hai biến có dạng như sau

$$u(x,y) = g(x,y) + \int_0^1 \int_0^1 K(x,y,s,t;u(s,t),D_1^m u(s,t))dsdt, \tag{0.13}$$

$$u(x,y) = g(x,y) + \int_0^1 \int_0^1 K(x,y,s,t;u(s,t), D_1^m u(s,t), D_2^n u(s,t))dsdt, \tag{0.14}$$

trong đó $(x,y) \in \Omega = [0,1] \times [0,1]$ và $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hoặc $K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ là các hàm cho trước. Ký hiệu $D_1^m u = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}$, $D_2^n u = \frac{\partial^n u}{\partial y^n}$, lần lượt để chỉ các đạo hàm riêng cấp $m \geq 1$, $n \geq 1$ của một hàm u xác định trên Ω, đối với biến thứ nhất và biến thứ hai. Các tác giả trong [P. H. Danh et al., Results in Math. **71** (1) (2017) 251-281], đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và tính compact của tập nghiệm cho (0.13) trong các trường hợp $m = 1$ hoặc $m \geq 2$ và cho (0.14) trong trường hợp $m \geq 1$ và $n \geq 1$.

Trên cơ sở các công trình trên, luận án nghiên cứu tính giải được và tính compact của tập nghiệm cho một số phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp 1, cấp m $(m \geq 2)$, cấp $m+n$ theo nhiều biến, lần lượt có dạng (0.1), (0.2), (0.3). Việc nghiên cứu tập trung vào các vấn đề sau:

- Thiết lập các không gian hàm mới tương thích với từng dạng phương trình vi tích phân hàm phi tuyến và chứng minh các không gian hàm này là không gian Banach đồng thời đưa ra các tiêu chuẩn để một tập con trong mỗi không gian hàm này là tập compact tương đối.

- Sự tồn tại nghiệm và các tính chất của nghiệm như tính duy nhất nghiệm hoặc tính compact của tập nghiệm đối với từng dạng phương trình. Ở đây, nghiệm của các phương trình được xem xét cả trong trường hợp chúng nhận giá trị trong không gian Banach E tổng quát và trong trường hợp E là không gian thực.

Bằng các phương pháp và kỹ thuật của giải tích hàm phi tuyến, trong đó công cụ chính là phương pháp điểm bất động kết hợp với việc thiết lập các không gian hàm mới, luận án đã đạt được mục tiêu nghiên cứu. Cấu trúc của luận án gồm phần mở đầu, phần nội dung chính chia làm bốn chương (chương 1 đến chương 4) và cuối cùng là phần kết luận. Kết quả thu được cho ba dạng phương trình (0.1), (0.2), (0.3) được trình bày chi tiết trong các chương với nội dung tóm tắt như sau.

(i) Chương 1 thiết lập các không gian hàm X_1, X_m, $X_{m,n}$ và chứng minh các không gian hàm này là không gian Banach đồng thời đưa ra các tiêu chuẩn để một tập con trong mỗi không gian hàm này là tập compact tương đối.

(ii) Chương 2 xét phương trình vi tích phân hàm phi tuyến (0.1), trong đó $g : \Omega \to E$, $H : \Delta \times E^2 \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước, ở đây E là không gian Banach tổng quát với chuẩn $\|\cdot\|_E$, và $\Delta = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : y \in B_x\}$, $B_x = [0,x_1] \times \cdots \times [0,x_N]$. Ký hiệu $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ để chỉ đạo hàm riêng của hàm u xác định trên Ω, theo biến thứ nhất. Chương này xét (0.1) lần lượt theo các trường hợp $H \equiv 0$ và $H \neq 0$.

Trường hợp $H \equiv 0$, bằng cách biến đổi phương trình (0.1) về dạng phương trình toán tử, áp dụng nguyên lý ánh xạ co Banach, dưới một số giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, K, sự tồn tại duy nhất nghiệm của (0.1) trong X_1 được chứng minh. Tiếp theo, áp dụng định lý Schauder, với các giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, K, tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của (0.1) trong X_1 được khẳng định.

Trường hợp $H \neq 0$, bằng cách biến đổi phương trình (0.1) về phương trình điểm bất động của tổng 2 toán tử, một toán tử co và một toán tử hoàn toàn liên tục, sử dụng định lý điểm bất động Krasnosel'skii và thiết lập các giả thiết trên g, H, K, tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của (0.1) trong X_1 được chỉ ra.

(iii) Chương 3 khảo sát phương trình vi tích phân hàm phi tuyến (0.2), với $g : \Omega \to E$, H, $K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E$ là các hàm cho trước, E là không gian Banach tổng quát với chuẩn $\|\cdot\|_E$. Ký hiệu $D_1^i u = \frac{\partial^i u}{\partial x_1^i}$ chỉ đạo hàm riêng cấp i $(i = 1, \cdots, m)$ theo biến thứ nhất của hàm u. Với cùng phương pháp như ở trường hợp $H \neq 0$ của chương 2, tập nghiệm của (0.2) được chứng minh là tập khác rỗng và compact trong X_m.

(iv) Chương 4 nghiên cứu phương trình vi tích phân hàm phi tuyến (0.3), với $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega = [0,1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$, H, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước, E cũng là không gian Banach tổng quát với chuẩn $\|\cdot\|_E$. Ký hiệu $D_2^n D_1^m u = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x_1^m \partial x_2^n} = \frac{\partial^n}{\partial x_2^n}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}\right)$ chỉ đạo hàm riêng cấp $m+n$ theo hai biến của hàm u, gồm lấy đạo hàm riêng cấp m theo biến thứ nhất và sau đó lấy đạo hàm riêng cấp n theo biến thứ hai. Trên cơ sở xây dựng các giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, H, K, với cùng phương pháp như ở trường hợp $H \neq 0$ của chương 2, tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của (0.3) trong $X_{m,n}$ được chứng minh.

Sự tồn tại nghiệm và các tính chất của các tập nghiệm tương ứng nêu trên vẫn còn đúng khi xem xét không gian Banach E trong trường hợp đặc biệt, $E = \mathbb{R}$, nhưng với các giả thiết được giảm nhẹ hơn trong từng trường hợp cụ thể. Cuối các chương 2, 3 và 4, các ví dụ minh họa các kết quả đạt được cho các phương trình (0.1), (0.2), (0.3) ứng với các trường hợp $E = \mathbb{R}$ và $E = C([0,1]; \mathbb{R})$ cũng được trình bày.

Các kết quả trên đây của luận án là sự phát triển và kế thừa các kết quả trong 6 bài báo [D1]-[D6] đã công bố và 1 bài gửi đăng [D7] trên tạp chí khoa học chuyên ngành. Một phần kết quả của luận án và kết quả liên quan đã được báo cáo trong các hội nghị:

- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 8, Nha Trang, 10-14/08/2013.
- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 9, Nha Trang, 14-18/08/2018.
- Hội nghị Khoa học lần thứ 10, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh, 11/11/2016.
- Hội nghị Khoa học lần thứ 11, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. Hồ Chí Minh, 09-10/11/2018.
- Hội nghị Toán học Miền Trung-Tây Nguyên lần thứ 1, Quy Nhơn, 12-14/08/2015.
- Hội nghị Toán học Miền Trung-Tây Nguyên lần thứ 2, Đà Lạt, 09-11/12/2017.
- Hội nghị Toán học Miền Trung-Tây Nguyên lần thứ 3, Buôn Ma Thuột, 02-04/8/2019.
- Hội nghị Toàn quốc lần thứ 4 về Ứng dụng toán học, Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, 23-25/12/2015.
- Hội nghị Khoa học "Toán học Giải tích và Ứng dụng", Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa, 26-28/05/2016.

Chương 1
Các công cụ sử dụng trong luận án

Chương 1 chủ yếu trình bày việc xây dựng các không gian hàm mới phù hợp với các dạng phương trình đề cập trong luận án. Trong chương này, các không gian hàm mới vừa nêu sẽ được chứng minh là các không gian Banach, đặc biệt, các tiêu chuẩn để một tập con là tập compact tương đối trong các không gian hàm này cũng được thiết lập một cách cụ thể, cả trong trường hợp tổng quát và trong trường hợp riêng. Ngoài ra, để thuận tiện cho việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của các phương trình nêu trong các chương 2-4, chương này cũng nhắc lại các định lý điểm bất động như nguyên lý ánh xạ co của Banach, Định lý Schauder, Định lý điểm bất động Krasnosel'skii.

1.1 Không gian X_1

1.1.1 Thiết lập không gian hàm X_1

Cho $\Omega = [0,1]^N$ và $(E, \|\cdot\|_E)$ là không gian Banach. Xét $X = C(\Omega; E)$ là không gian Banach gồm các hàm liên tục từ Ω vào E đối với chuẩn sau đây

$$\|u\|_X = \sup_{x\in\Omega} \|u(x)\|_E \,,\; u \in X. \tag{1.1.1}$$

Thiết lập không gian X_1 như sau

$$X_1 = \{u \in X : D_1 u \in X\}. \tag{1.1.2}$$

Rõ ràng, ta luôn có $C^1(\Omega; E) \subset X_1 \subset X$, nhưng $C^1(\Omega; E) \neq X_1$ và $X_1 \neq X$. Thật vậy, cho $e_1 \in E$, $e_1 \neq 0$.

(i) Xét $u(x) = u(x_1, \cdots, x_N) = \left(\left|x_1 - \frac{1}{2}\right| + \sum_{i=2}^{N}\left|x_i - \frac{1}{i+1}\right|\right) e_1$, ta có $u \in X$, nhưng $u \notin X_1$;

(ii) Xét $v = v(x) = \left(x_1^2 + \sum_{i=2}^{N}\left|x_i - \frac{1}{i+1}\right|\right) e_1$, ta có $v \in X_1$, nhưng $v \notin C^1(\Omega; E)$.

Bổ đề 1.1.1 *X_1 là không gian Banach đối với chuẩn*

$$\|u\|_{X_1} = \|u\|_X + \|D_1 u\|_X \,,\;\; u \in X_1. \tag{1.1.3}$$

1.1.2 Tiêu chuẩn để một tập con trong X_1 là tập compact tương đối

Bổ đề dưới đây sẽ chỉ ra một tiêu chuẩn để một tập con của X_1 là tập compact tương đối trong X_1.

Bổ đề 1.1.2 *Cho $\mathcal{F} \subset X_1$. Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong X_1 khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $\forall x \in \Omega$, *các tập* $\mathcal{F}(x) = \{u(x) : u \in \mathcal{F}\}$
và $D_1\mathcal{F}(x) = \{D_1 u(x) : u \in \mathcal{F}\}$ *là compact tương đối trong* E;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x,\, \bar{x} \in \Omega,\, |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \sup_{u\in\mathcal{F}} [u(x) - u(\bar{x})]_E < \varepsilon,$

trong đó ta ký hiệu $[u(x) - u(\bar{x})]_E = \|u(x) - u(\bar{x})\|_E + \|D_1 u(x) - D_1 u(\bar{x})\|_E$.

Chú thích 1. Trong trường hợp E là không gian hữu hạn chiều, một tập trong E là compact khi và chỉ khi nó là tập đóng và bị chặn, nên điều kiện để một tập con trong X_1 là compact tương đối được giảm nhẹ như sau, trong đó điều kiện (ii) được giữ nguyên. Ta phát biểu lại với $E = \mathbb{R}$ như sau.

Bổ đề 1.1.3 *Cho* $\mathcal{F} \subset X_1 = \{u \in C(\Omega; \mathbb{R}) : D_1 u \in C(\Omega; \mathbb{R})\}$. *Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong X_1 khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $\exists M > 0 : \|u\|_{X_1} \le M,\, \forall u \in \mathcal{F}$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x,\, \bar{x} \in \Omega,\, |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \sup_{u\in\mathcal{F}} [u(x) - u(\bar{x})]_{\mathbb{R}} < \varepsilon,$

trong đó ta ký hiệu $[u(x) - u(\bar{x})]_{\mathbb{R}} = |u(x) - u(\bar{x})| + |D_1 u(x) - D_1 u(\bar{x})|$.

1.2 Không gian X_m

1.2.1 Thiết lập không gian hàm X_m

Xét $X = C(\Omega; E)$ là không gian Banach như ở Mục 1.1.1. Đặt

$$X_m = \{u \in X : D_1^i u \in X,\ i = \overline{1,m}\}. \tag{1.2.1}$$

Chú ý rằng trong trường hợp $E = \mathbb{R}$, $N = 2$, ta có $C^1(\Omega;\mathbb{R}) \setminus X_m \neq \phi$, $X_m \setminus C^1(\Omega;\mathbb{R}) \neq \phi$, $X_m \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}) \neq \phi$, với mọi $m = 2, 3, \cdots$

Bổ đề 1.2.1 *X_m là không gian Banach đối với chuẩn*

$$\|u\|_{X_m} = \textstyle\sum_{i=0}^m \left\|D_1^i u\right\|_X,\ u \in X_m. \tag{1.2.2}$$

1.2.2 Tiêu chuẩn để một tập con trong X_m là tập compact tương đối

Bổ đề dưới đây sẽ tiếp tục chỉ ra một điều kiện cần và đủ để một tập con trong X_m là tập compact tương đối.

Bổ đề 1.2.2 *Cho $\mathcal{F} \subset X_m$. Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong X_m khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $\forall x \in \Omega$, *các tập* $\mathcal{F}(x) = \{u(x) : u \in \mathcal{F}\}$ *và*
$D_1^i\mathcal{F}(x) = \{D_1^i u(x) : u \in \mathcal{F}\}$, $i = \overline{1,m}$ *là compact tương đối trong E;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x,\ \bar{x} \in \Omega,\ |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \sup\limits_{u\in\mathcal{F}} [u(x) - u(\bar{x})]_E < \varepsilon,$

trong đó ta ký hiệu $[u(x) - u(\bar{x})]_E = \|u(x) - u(\bar{x})\|_E + \sum_{i=1}^m \left\|D_1^i u(x) - D_1^i u(\bar{x})\right\|_E$.

Chú thích 2. Trong trường hợp E là không gian hữu hạn chiều, tương tự như ở Chú thích 1, các điều kiện trong Bổ đề 1.2.2 cũng được giảm nhẹ nên Bổ đề 1.2.2 được phát biểu lại với $E = \mathbb{R}$ như sau.

Bổ đề 1.2.3 *Cho $\mathcal{F} \subset X_m = \{u \in C(\Omega;\mathbb{R}) : D_1^i u \in C(\Omega;\mathbb{R}),\ i = \overline{1,m}\}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong X_m khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $\exists M > 0 : \|u\|_{X_m} \leq M,\ \forall u \in \mathcal{F};$

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x,\ \bar{x} \in \Omega,\ |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \sup\limits_{u\in\mathcal{F}} [u(x) - u(\bar{x})]_{\mathbb{R}} < \varepsilon,$

trong đó ta ký hiệu $[u(x) - u(\bar{x})]_{\mathbb{R}} = |u(x) - u(\bar{x})| + \sum_{i=1}^m \left|D_1^i u(x) - D_1^i u(\bar{x})\right|$.

1.3 Không gian $X_{m,n}$

1.3.1 Thiết lập không gian hàm $X_{m,n}$

Với $E = \mathbb{R}$, xét $X = C(\Omega;\mathbb{R})$ là không gian Banach gồm các hàm liên tục từ $u : \Omega = [0,1]^N \to \mathbb{R}$ đối với chuẩn

$$\|u\|_X = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|,\ u \in X. \tag{1.3.1}$$

Với $m,\ n \in \mathbb{N}$, ta thiết lập không gian hàm $X_{m,n}$ như sau

$$X_{m,n} = \{u \in X : D_1^i u = \tfrac{\partial^i u}{\partial x_1^i} \in X,\ D_2^j D_1^m u = \tfrac{\partial^{m+j} u}{\partial x_1^m \partial x_2^j} \in X,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\}. \tag{1.3.2}$$

Ta có các bổ đề sau đây.

Bổ đề 1.3.1 *Với $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, ta có $X_{m,n} \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}) \neq \phi$, $X_{m,n} \setminus C^1(\Omega;\mathbb{R}) \neq \phi$, $C^1(\Omega;\mathbb{R}) \setminus X_{m,n} \neq \phi$ và $X_{m,n} \neq C^k(\Omega;\mathbb{R})$ $\forall k = 1, 2, \cdots$.*

Chú thích 3. Từ Bổ đề 1.3.1 ta suy ra $C^{m+n}(\Omega;\mathbb{R}) \subsetneqq X_{m,n} \subsetneqq C(\Omega;\mathbb{R})$. Mặt khác, Bổ đề 1.3.1 vẫn đúng với $\Omega = [0,1]^N$ $(N \geq 3)$. Thật vậy, $X_{m,n} \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}) \neq \phi$ hiển nhiên đúng vì $\phi \neq C^{m+n}(\Omega;\mathbb{R}) \subset X_{m,n} \cap C^1(\Omega;\mathbb{R})$; $X_{m,n} \setminus C^1(\Omega;\mathbb{R}) \neq \phi$ cũng đúng, vì có $u \in X_{m,n}$ nhưng $u \notin C^1(\Omega;\mathbb{R})$, chẳng hạn $u = u(x_1, \cdots, x_N) = e^{x_1+\cdots+x_N} + \sum_{i=2}^N \left|x_i - \frac{1}{2}\right|$.

Mặt khác, xét hàm $v(x_1, \cdots, x_N) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} + e^{x_1+\cdots+x_N}, & x \in \Omega,\ x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Dễ kiểm tra lại rằng $v \in C^1(\Omega;\mathbb{R})$, nhưng $v \notin X_{1,1}$. $\square$

Bổ đề 1.3.2 *$X_{m,n}$ là không gian Banach đối với chuẩn*

$$\|u\|_{X_{m,n}} = \sum_{i=0}^{m} \left\|D_1^i u\right\|_X + \sum_{j=1}^{n} \left\|D_2^j D_1^m u\right\|_X, \ u \in X_{m,n}. \tag{1.3.3}$$

1.3.2 Tiêu chuẩn để một tập con trong $X_{m,n}$ là tập compact tương đối

Tiếp theo, bổ đề dưới đây sẽ cho chúng ta một điều kiện cần và đủ để một tập con trong $X_{m,n}$ là compact tương đối.

Bổ đề 1.3.3 *Cho $X = C(\Omega;\mathbb{R})$, $\mathcal{F} \subset X_{m,n}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong $X_{m,n}$ khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $\exists M > 0 : \|u\|_{X_{m,n}} \leq M, \forall u \in \mathcal{F};$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} \in \Omega, |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \sup\limits_{u\in\mathcal{F}} [u(x) - u(\bar{x})]_{m,n} < \varepsilon,$

trong đó $[u(x) - u(\bar{x})]_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \left|D_1^i u(x) - D_1^i u(\bar{x})\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|D_2^j D_1^m u(x) - D_2^j D_1^m u(\bar{x})\right|.$

Chú thích 4. Các Bổ đề 1.3.2, Bổ đề 1.3.3 với $E = \mathbb{R}$ đã được thiết lập và chứng minh trong [D3]. Hai bổ đề này sẽ được mở rộng thành hai Bổ đề 1.3.4, 1.3.5 như dưới đây, khi xem xét E là không gian Banach tổng quát chứa trường hợp $E = \mathbb{R}$ như là trường hợp riêng.

Với $X = C(\Omega; E)$ và $m, n \in \mathbb{N}$, xét không gian hàm $X_{m,n}$ như sau

$$X_{m,n} = \{u \in X : D_1^i u \in X, \ D_2^j D_1^m u \in X, \ i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}\}. \tag{1.3.4}$$

Bổ đề 1.3.4 *$X_{m,n}$ là không gian Banach đối với chuẩn*

$$\|u\|_{X_{m,n}} = \sum_{i=0}^{m} \left\|D_1^i u\right\|_X + \sum_{j=1}^{n} \left\|D_2^j D_1^m u\right\|_X, \ u \in X_{m,n}. \tag{1.3.5}$$

Bổ đề 1.3.5 *Cho $X = C(\Omega; E)$, $\mathcal{F} \subset X_{m,n}$. Khi đó $\mathcal{F}$ là compact tương đối trong $X_{m,n}$ khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn*

(i) $\forall x \in \Omega$, *các tập* $\mathcal{F}(x) = \{u(x) : u \in \mathcal{F}\}$, $D_1^i \mathcal{F}(x) = \{D_1^i u(x) : u \in \mathcal{F}\}$, $i = \overline{1,m}$ *và* $D_2^j D_1^m \mathcal{F}(x) = \{D_2^j D_1^m u(x) : u \in \mathcal{F}\}$, $j = \overline{1,n}$ *là compact tương đối trong E;*

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, \bar{x} \in \Omega, |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \sup\limits_{u\in\mathcal{F}} [u(x) - u(\bar{x})]_{m,n} < \varepsilon,$

trong đó $[u(x) - u(\bar{x})]_{m,n} = \sum_{i=0}^{m} \left\|D_1^i u(x) - D_1^i u(\bar{x})\right\|_E + \sum_{j=1}^{n} \left\|D_2^j D_1^m u(x) - D_2^j D_1^m u(\bar{x})\right\|_E.$

1.4 Các định lý điểm bất động sử dụng cho luận án

Sau đây là phần nhắc lại các định lý điểm bất động được sử dụng trong luận án.

1.4.1 Nguyên lý ánh xạ co của Banach

Định lý 1.4.1 (xem [K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, NewYork, 1990])

Cho (X, d) là không gian metric đầy đủ và $U : X \to X$ là ánh xạ co, nghĩa là tồn tại $k \in [0, 1)$ sao cho $d(Ux, Uy) \leq kd(x, y)$, với mọi $x, y \in X$. Khi đó U có duy nhất một điểm bất động $x^* \in X$. Hơn nữa, với mỗi $x_0 \in X$ cho trước, dãy lặp $\{U^n x_0\}$ hội tụ về x^*.

1.4.2 Định lý Schauder

Định lý 1.4.2 (xem [M. A. Krasnosel'skii, P. P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo, 1984])

Cho K là tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Banach E và $T : K \to K$ là ánh xạ liên tục sao cho bao đóng $\overline{T(K)}$ của $T(K)$ là tập compact. Khi đó T có ít nhất một điểm bất động.

1.4.3 Định lý Krasnosel'skii trong không gian Banach

Định lý 1.4.3 (xem [E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Part I, Springer-Verlag, NewYork, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1986])

Cho M là tập con khác rỗng, lồi, đóng và bị chặn của không gian Banach X. Giả sử rằng $U : M \to X$ là một ánh xạ co và $C : M \to X$ là toán tử compact, nghĩa là C liên tục và $C(M)$ chứa trong một tập compact (hay nói cách khác C là toán tử hoàn toàn liên tục) sao cho $U(x) + C(y) \in M, \forall x, y \in M$. Khi đó $U + C$ có điểm bất động.

Kết luận chương 1

Chương 1 đã xây dựng được các không gian Banach X_1, X_m và $X_{m,n}$. Các không gian hàm này hoàn toàn mới, trong đó $C^1(\Omega; E)$ là không gian con thật sự của X_1; các không gian X_m, $X_{m,n}$ khác với các không gian $C^k(\Omega; E)$, với $k = 1, 2, \cdots$. Các không gian hàm này sẽ được sử dụng trong việc chứng minh sự tồn tại nghiệm của các phương trình đề cập trong các chương tiếp theo của luận án, từ đó xem xét các tính chất có thể có của các nghiệm.

Chương 2

Khảo sát phương trình vi tích phân phi tuyến cấp 1

Chương này khảo sát phương trình vi tích phân phi tuyến cấp 1 có dạng:

$$u(x) = g(x) + \int_{B_x} H(x, y; u(y), D_1u(y))dy + \int_{\Omega} K(x, y; u(y), D_1u(y))dy, \tag{2.0.1}$$

với $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega = [0, 1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$, $H : \Delta \times E^2 \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước, E là không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_E$, và $\Delta = \{(x, y) \in \Omega \times \Omega : y \in B_x\}$, $B_x = [0, x_1] \times \cdots \times [0, x_N]$. Ký hiệu $D_1u = \frac{\partial u}{\partial x_1}$ chỉ đạo hàm riêng của hàm u xác định trên Ω, theo biến thứ nhất. Trước hết, sự tồn tại nghiệm của phương trình sẽ được quan tâm nghiên cứu và sau đó xem xét các tính chất có thể có của nghiệm.

Thông thường, để xử lý phương trình vi tích phân có chứa đạo hàm riêng D_1u của ẩn hàm u người ta thường sử dụng không gian hàm $C^1(\Omega; E)$ để tìm nghiệm. Tuy nhiên, có một cách để giảm nhẹ việc sử dụng không gian $C^1(\Omega; E)$, bằng cách thiết lập một không gian Banach phù hợp là X_1 như đã trình bày ở mục 1.1 của chương 1 và tìm nghiệm trong không gian hàm này. Đây thực sự là một sự giảm nhẹ như mong muốn vì ta chỉ ra được $C^1(\Omega; E) \subsetneqq X_1 \subsetneqq C(\Omega; E)$; đồng thời cũng chỉ ra được một tiêu chuẩn để một tập con là tập compact tương đối trong không gian hàm này, giúp cho việc áp dụng các định lý điểm bất động một cách phù hợp để chứng minh phương trình (2.0.1) tồn tại nghiệm. Tiêu chuẩn đó chính là nội dung của Bổ đề 1.1.2.

Chương 2 sẽ xét hai trường hợp đối với H và trong toàn bộ chương này, các không gian Banach $X = C(\Omega; E)$ và $X_1 = \{u \in X : D_1u \in X\}$ được định nghĩa như trong Mục 1.1 của Chương 1 sẽ được sử dụng để xem xét sự tồn tại nghiệm của phương trình (2.0.1). Với trường hợp $H \equiv 0$, nguyên lý ánh xạ co được áp dụng để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm. Ngoài ra, Định lý Schauder cũng được áp dụng để chứng minh phương trình tồn tại nghiệm và tập nghiệm là tập compact. Với trường hợp $H \neq 0$, định lý điểm bất động Krasnosel'skii được sử dụng để chứng minh phương trình tồn tại nghiệm và cũng chỉ ra được tập nghiệm của phương trình là tập compact. Để minh họa các kết quả thu được, chương này cũng trình bày các ví dụ cho phương trình (2.0.1) tương ứng với trường hợp $E = \mathbb{R}$ và trường hợp $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$.

Toàn bộ nội dung của chương 2 là sự tổng quát hóa các kết quả đã công bố trong các bài báo [D1], [D4], [D5] và đã gửi đăng trong [D7].

2.1 Khảo sát phương trình (2.0.1) nhận giá trị trong không gian Banach E với $H \equiv 0$

Khi $H \equiv 0$, phương trình (2.0.1) trở thành

$$u(x) = g(x) + \int_{\Omega} K(x, y; u(y), D_1u(y))dy, \tag{2.1.1}$$

với mọi $x \in \Omega = [0, 1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước.

Trước hết, với các giả thiết thích hợp, ta sẽ chỉ ra phương trình (2.1.1) có nghiệm duy nhất. Thành lập các giả thiết sau:

(G) $g \in X_1$;

(K_1) $K \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$, $D_1K \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$,

và tồn tại các hàm không âm $k_0, k_1 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(i) $\beta = \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega k_0(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega k_1(x,y)dy < 1,$

(ii) $\|K(x,y;u,v) - K(x,y;\bar{u},\bar{v})\|_E \le k_0(x,y)\left(\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E\right),$

(iii) $\|D_1K(x,y;u,v) - D_1K(x,y;\bar{u},\bar{v})\|_E \le k_1(x,y)\left(\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E\right),$
$\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall(u,v)$, $(\bar{u},\bar{v})\in E^2$.

Khi đó, ta có định lý sau

Định lý 2.1.1 *Cho g, K thỏa các giả thiết* (G), (K_1). *Khi đó phương trình* (2.1.1) *có nghiệm duy nhất trong* X_1.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra với các giả thiết thích hợp, phương trình (2.1.1) tồn tại nghiệm và hơn nữa tập nghiệm còn là tập compact. Ta thành lập các giả thiết sau:

$(\bar{K}_1)$ $K\in C(\Omega\times\Omega\times E^2;E)$, $D_1K\in C(\Omega\times\Omega\times E^2;E)$,
và tồn tại các hàm không âm $\bar{k}_0, \bar{k}_1 : \Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(i) $\bar{\beta} = \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_0(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_1(x,y)dy < 1,$

(ii) $\|K(x,y;u,v)\|_E \le \bar{k}_0(x,y)\left(1+\|u\|_E+\|v\|_E\right)$, $\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall(u,v)\in E^2$;

(iii) $\|D_1K(x,y;u,v)\|_E \le \bar{k}_1(x,y)\left(1+\|u\|_E+\|v\|_E\right)$, $\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall(u,v)\in E^2$;

$(\bar{K}_2)$ K, $D_1K : \Omega\times\Omega\times E^2\to E$, là hoàn toàn liên tục sao cho với mọi tập con bị chặn J của E^2, với mọi $\varepsilon>0$, tồn tại $\delta>0$, sao cho

$$\forall x,\ \bar{x}\in\Omega,\ |x-\bar{x}|<\delta \Longrightarrow \|K(x,y;u,v)-K(\bar{x},y;u,v)\|_E + \|D_1K(x,y;u,v)-D_1K(\bar{x},y;u,v)\|_E < \varepsilon,\ \forall(y,u,v)\in\Omega\times J.$$

Trên cơ sở các giả thiết này, bằng cách áp dụng định lý điểm bất động Schauder, ta thu được kết quả sau:

Định lý 2.1.2 *Cho g, K thỏa các giả thiết* (G), $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$. *Khi đó tập nghiệm của* (2.1.1) *là khác rỗng và compact trong* X_1.

2.2 Chú ý về phương trình (2.0.1) nhận giá trị thực với $H\equiv 0$

Xét phương trình (2.1.1) với $E=\mathbb{R}$, trong đó $g:\Omega\to\mathbb{R}$, $K:\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ là các hàm cho trước. Trong trường hợp này, ta có $X=C(\Omega;\mathbb{R})$ và $X_1=\{u\in X : D_1u\in X\}$ là các không gian Banach ứng với $E=\mathbb{R}$.

Thiết lập các giả thiết:

(G') $g\in X_1$;

(K_1') $K\in C(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $D_1K\in C(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$,
và tồn tại các hàm không âm k_0, $k_1:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $\beta = \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega k_0(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega k_1(x,y)dy < 1,$

(ii) $|K(x,y;u,v) - K(x,y;\bar{u},\bar{v})| \le k_0(x,y)\left(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|\right),$

(iii) $|D_1K(x,y;u,v) - D_1K(x,y;\bar{u},\bar{v})| \le k_1(x,y)\left(|u-\bar{u}|+|v-\bar{v}|\right),$
$\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall(u,v)$, $(\bar{u},\bar{v})\in\mathbb{R}^2$;

$(\bar{K}_1')$ $K\in C(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, $D_1K\in C(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$,
và tồn tại các hàm không âm $\bar{k}_0, \bar{k}_1:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn

(i) $\bar{\beta} = \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_0(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_1(x,y)dy < 1,$

(ii) $|K(x,y;u,v)| \le \bar{k}_0(x,y)\left(1+|u|+|v|\right)$, $\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$,

(iii) $|D_1K(x,y;u,v)| \le \bar{k}_1(x,y)\left(1+|u|+|v|\right)$, $\forall(x,y)\in\Omega\times\Omega$, $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$.

Khi đó, ta có các kết quả sau

Định lý 2.2.1 *Cho* g, K *thỏa các giả thiết* (G'), (K_1'). *Khi đó phương trình* $(2.1.1)$ *có nghiệm duy nhất trong* X_1.

Định lý 2.2.2 *Cho* g, K *thỏa các giả thiết* (G'), $(\bar{K}_1')$. *Khi đó tập nghiệm của* $(2.1.1)$ *là khác rỗng và compact trong* X_1.

Chú thích về Định lý 2.2.1 và 2.2.2. Các Định lý 2.2.1 và 2.2.2 lần lượt là các trường hợp riêng của các Định lý 2.1.1 và Định lý 2.1.2 tương ứng với $E = \mathbb{R}$. Trong phát biểu và chứng minh Định lý 2.2.2, không cần có giả thiết tương tự như $(\bar{K}_2)$ bởi vì, để kiểm tra tập $\mathcal{F} = A(B_M)$ là compact tương đối trong X_1, Bổ đề 1.1.3 được áp dụng thay vì Bổ đề 1.1.2, trong đó ta biết là điều kiện (i) của Bổ đề 1.1.2 đã được giảm nhẹ.

2.3 Khảo sát phương trình (2.0.1) nhận giá trị trong không gian Banach E với $H \neq 0$

Để khảo sát sự tồn tại nghiệm và tính chất của nghiệm của phương trình (2.0.1), các giả thiết cho g, H, K sau đây được thành lập:

(G) $\quad g \in X_1$;

(H_1) $H \in C(\Delta \times E^2; E)$, $D_1 H \in C(\Delta \times E^2; E)$ và tồn tại các hàm số không âm $h_0, h_1 : \Delta \to \mathbb{R}$ sao cho thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\|H(x,y;u,v) - H(x,y;\bar{u},\bar{v})\|_E \leq h_0(x,y)\left[\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E\right]$,

(ii) $\|D_1H(x,y;u,v) - D_1H(x,y;\bar{u},\bar{v})\|_E \leq h_1(x,y)\left[\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E\right]$

$\forall (x,y) \in \Delta$, $\forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in E$;

$(\bar{K}_1)$ $K \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$, $D_1K \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$ và tồn tại các hàm số không âm $\bar{k}_0$, $\bar{k}_1 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $\|K(x,y;u,v)\|_E \leq \bar{k}_0(x,y)\left(1 + \|u\|_E + \|v\|_E\right)$,

(ii) $\|D_1K(x,y;u,v)\|_E \leq \bar{k}_1(x,y)\left(1 + \|u\|_E + \|v\|_E\right)$, $\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall u, v \in E$;

$(\bar{K}_2)$ K, $D_1K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là hoàn toàn liên tục sao cho với mọi tập con bị chặn J của E^2, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho

$$\forall x,\ \bar{x} \in \Omega,\ |x - \bar{x}| < \delta \Longrightarrow \|K(x,y;u,v) - K(\bar{x},y;u,v)\|_E + \|D_1K(x,y;u,v) - D_1K(\bar{x},y;u,v)\|_E < \varepsilon,\ \forall (y,u,v) \in \Omega \times J;$$

(HK) $\bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 < 1$, trong đó

$$\bar{\beta}_1 = \sup_{x\in\Omega}\int_{B_x} h_0(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\left[\int_{B_{x'}} h_0(x,x_1,y')dy' + \int_{B_x} h_1(x,y)dy\right],$$
$$\bar{\beta}_2 = \sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega} \bar{k}_0(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega} \bar{k}_1(x,y)dy.$$

Khi đó, ta có định lý sau.

Định lý 2.3.1 *Cho* g, H, K *thỏa các giả thiết* (G), (H_1), $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$, (HK). *Khi đó tập nghiệm của* $(2.0.1)$ *là khác rỗng và compact trong* X_1.

2.4 Chú ý về phương trình (2.0.1) nhận giá trị thực với $H \neq 0$

Xét phương trình (2.0.1) với $E = \mathbb{R}$, trong đó $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $H : \Delta \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm cho trước. Ta thành lập các giả thiết cho g, H, K sau:

(G') $g \in X_1$;

(H_1') $H \in C(\Delta \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $D_1H \in C(\Delta \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ và tồn tại các hàm số không âm h_0, $h_1 : \Delta \to \mathbb{R}$ sao cho các tính chất sau được thỏa mãn:

(i) $|H(x,y;u,v) - H(x,y;\bar{u},\bar{v})| \leq h_0(x,y)\left[|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\right]$,

(ii) $|D_1H(x,y;u,v) - D_1H(x,y;\bar{u},\bar{v})| \leq h_1(x,y)\left[|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\right]$

$\forall (x,y) \in \Delta$, $\forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}$;

$(\bar{K}_1')$ $K \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $D_1K \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ và tồn tại các hàm số không âm $\bar{k}_0$, $\bar{k}_1 : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho thỏa mãn các tính chất sau:

(i) $|K(x,y;u,v)| \ \le \bar{k}_0(x,y)\,(1+|u|+|v|)\,,$
(ii) $|D_1K(x,y;u,v)| \le \bar{k}_1(x,y)\,(1+|u|+|v|)\,,\ \forall (x,y)\in\Omega\times\Omega,\ \forall u,v\in\mathbb{R};$

$(HK)'$ $\bar{\beta}_1+\bar{\beta}_2<1$, trong đó

$$\bar{\beta}_1=\sup_{x\in\Omega}\int_{B_x}h_0(x,y)dy+\sup_{x\in\Omega}\left(\int_{B_{x'}}h_0(x,x_1,y')dy'+\int_{B_x}h_1(x,y)dy\right),$$
$$\bar{\beta}_2=\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega}\bar{k}_0(x,y)dy+\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega}\bar{k}_1(x,y)dy.$$

Khi đó, ta có kết quả sau.

Định lý 2.4.1 *Cho g, H, K thỏa các giả thiết (G'), (H_1'), $(\bar{K}_1')$, $(HK)'$. Khi đó tập nghiệm của (2.0.1) là khác rỗng và compact trong X_1.*

Chú thích về Định lý 2.4.1

Định lý 2.4.1 là một trường hợp riêng của Định lý 2.3.1 với $E=\mathbb{R}$. Trong phát biểu và chứng minh Định lý 2.4.1, ta không cần có giả thiết tương tự như $(\bar{K}_2)$. Lý do là, để kiểm tra tập $\mathcal{F}=C(B_M)$ là compact tương đối trong X_1, Bổ đề 1.1.3 được áp dụng thay vì Bổ đề 1.1.2, trong đó ta biết là điều kiện (i) của Bổ đề 1.1.2 đã được giảm nhẹ.

2.5 Các ví dụ minh họa

Phần này trình bày sáu ví dụ minh họa các kết quả đạt được trong các Mục 2.1 - 2.4 nêu trên đối với phương trình (2.0.1) có các dạng cụ thể như sau, tương ứng với trường hợp $E=\mathbb{R}$, $E=C([0,1];\mathbb{R})$.

2.5.1 Ví dụ cho phương trình (2.0.1) với $E=\mathbb{R}$

Xét phương trình (2.0.1) ứng với $E=\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}u(x,y)=g(x,y)&+\int_0^x\int_0^y H(x,y,s,t;u(s,t),D_1u(s,t))dsdt\\&+\int_0^1\int_0^1 K(x,y,s,t;u(s,t),D_1u(s,t))dsdt,\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

với mọi $(x,y)\in\Omega=[0,1]^2$ trong đó $g:\Omega\to\mathbb{R}$, $H:\Delta\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $K:\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ là các hàm cho trước và $\Delta=\{(x,y,s,t)\in\Omega\times\Omega: 0\le s\le x,\ 0\le t\le y\}$.

Ví dụ 2.5.1 Xét phương trình (2.5.1) với $H=0$ và các hàm g, K được cho bởi

$$\begin{cases} K(x,y,s,t;u,v)=k(x,y)\left[4s^\sigma t^\sigma\sin\left(\frac{\pi u}{2u_0(s,t)}\right)+s^\gamma t^\gamma\cos\left(\frac{2\pi v}{D_1u_0(s,t)}\right)\right],\\ g(x,y)=u_0(x,y)-\left(\frac{4}{(1+\sigma)^2}+\frac{1}{(1+\gamma)^2}\right)k(x,y),\end{cases}$$

trong đó

$$u_0(x,y)=e^x+x^{\gamma_1}\,|y-\alpha|^{\gamma_2}\,,\ k(x,y)=x^{\tilde{\gamma}_1}\,|y-\tilde{\alpha}|^{\tilde{\gamma}_2}\,,$$

và σ, γ, α, γ_2, γ_1, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_1$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0<\alpha,\ \tilde{\alpha}<1,\ 0<\gamma_2<1<\gamma_1,\ 0<\tilde{\gamma}_2<1<\tilde{\gamma}_1,\\ 4\pi\left(\frac{1}{(1+\sigma)^2}+\frac{\tilde{\gamma}_1}{(1+\gamma)^2}\right)\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2},(1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\}<1.\end{cases}$$

Chú ý rằng $u_0(x,y)=e^x+x^{\gamma_1}\,|y-\alpha|^{\gamma_2}$, $D_1u_0(x,y)=e^x+\gamma_1x^{\gamma_1-1}\,|y-\alpha|^{\gamma_2}$, vì thế $u_0\in X_1$ và $u_0(x,y)\ge 1$, $D_1u_0(x,y)\ge 1$.

Chúng ta sẽ kiểm tra lại rằng các giả thiết (G'), (K_1') của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn.

Bổ đề 2.5.1 *Cho các hằng số dương α, γ_2, γ_1 thỏa mãn $0<\alpha<1$, $0<\gamma_2<1<\gamma_1$. Khi đó*

$$\begin{aligned}0&\le x^{\gamma_1}\,|y-\alpha|^{\gamma_2}\le\max\{\alpha^{\gamma_2},(1-\alpha)^{\gamma_2}\},\ \forall x,y\in[0,1],\\ 0&\le x^{\gamma_1-1}\,|y-\alpha|^{\gamma_2}\le\max\{\alpha^{\gamma_2},(1-\alpha)^{\gamma_2}\},\ \forall x,y\in[0,1].\end{aligned}$$

Ví dụ 2.5.2 Xét phương trình (2.5.1) với $H = 0$ và các hàm g, K như sau

$$\begin{cases} K(x,y,s,t;u,v) = k(x,y)K_1(s,t;u,v), \\ g(x,y) = u_0(x,y) - 2\left(\frac{1}{(1+\sigma)^2} + \frac{1}{(1+\gamma)^2}\right)k(x,y), \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{cases} K_1(s,t;u,v) = s^\sigma t^\sigma \left[\frac{|u|}{u_0(s,t)} + \left|\frac{u}{u_0(s,t)}\right|^{2/3}\right] + s^\gamma t^\gamma \left[\frac{|v|}{D_1u_0(s,t)} + \left|\frac{v}{D_1u_0(s,t)}\right|^{3/5}\right], \\ u_0(x,y) = e^x + x^{\gamma_1}|y-\alpha|^{\gamma_2}, \ \ k(x,y) = x^{\tilde{\gamma}_1}|y-\tilde{\alpha}|^{\tilde{\gamma}_2}, \end{cases}$$

và σ, γ, α, γ_2, γ_1, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_1$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha, \tilde{\alpha} < 1, 0 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1, 0 < \tilde{\gamma}_2 < 1 < \tilde{\gamma}_1, \\ 4\left(\frac{1}{(1+\sigma)^2} + \frac{\tilde{\gamma}_1}{(1+\gamma)^2}\right)\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1. \end{cases}$$

Chú ý rằng $u_0 \in X_1$ chính là hàm u_0 ở Ví dụ 2.5.1, nên chúng ta sử dụng các tính chất có được của $u_0(x,y)$ và $D_1u_0(x,y)$ như trong Ví dụ 2.5.1.

Chúng ta sẽ kiểm tra lại rằng các giả thiết (G'), $(\bar{K}_1')$ của Định lý 2.2.2 là đúng.

Ví dụ 2.5.3 Xét phương trình (2.5.1) với các hàm g, K, H được cho bởi

$$\begin{cases} H(x,y,s,t;u,v) = k(x,y)\left[4s^\sigma t^\sigma \sin\left(\frac{\pi u}{2u_0(s,t)}\right) + s^\gamma t^\gamma \cos\left(\frac{2\pi v}{D_1u_0(s,t)}\right)\right], \\ K(x,y,s,t;u,v) = k(x,y)K_1(s,t,u,v), \\ g(x,y) = u_0(x,y) - \left(\frac{2+4x^{\sigma+1}y^{\sigma+1}}{(1+\sigma)^2} + \frac{2+x^{\gamma+1}y^{\gamma+1}}{(1+\gamma)^2}\right)k(x,y), \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{cases} K_1(s,t,u,v) = s^\sigma t^\sigma \left[\frac{|u|}{u_0(s,t)} + \left|\frac{u}{u_0(s,t)}\right|^{2/3}\right] + s^\gamma t^\gamma \left[\frac{|v|}{D_1u_0(s,t)} + \left|\frac{v}{D_1u_0(s,t)}\right|^{3/5}\right], \\ u_0(x,y) = e^x + x^{\gamma_1}|y-\alpha|^{\gamma_2}, \ \ k(x,y) = x^{\tilde{\gamma}_1}|y-\tilde{\alpha}|^{\tilde{\gamma}_2}, \end{cases}$$

và σ, γ, α, γ_2, γ_1, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_1$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha, \tilde{\alpha} < 1, 0 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1, 0 < \tilde{\gamma}_2 < 1 < \tilde{\gamma}_1, \\ \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \le 2\left[(1+\pi)(1+\tilde{\gamma}_1)\left(\frac{1}{(1+\sigma)^2} + \frac{1}{(1+\gamma)^2}\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. +\pi\left(\frac{1}{1+\sigma} + \frac{1}{1+\gamma}\right)\right]\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1. \end{cases}$$

Chú ý rằng hàm $u_0 \in X_1$ giống nhau ở Ví dụ 2.5.1, nên chúng ta sử dụng các tính chất có được của $u_0(x,y)$ và $D_1u_0(x,y)$ như trong Ví dụ 2.5.1.

Hàm $K(x,y,s,t;u,v) = k(x,y)K_1(s,t,u,v)$ giống nhau ở Ví dụ 2.5.2, nên K thỏa mãn giả thiết $(\bar{K}_1')$.

Chúng ta sẽ kiểm tra lại rằng các giả thiết (H_1'), $(HK)'$ là đúng. □

2.5.2 Ví dụ cho phương trình (2.0.1) với $E = C([0,1];\mathbb{R})$

Xét phương trình (2.0.1) ứng với $E = C([0,1];\mathbb{R})$;

$$\begin{aligned} u(x,y) = g(x,y) &+ \int_0^x\int_0^y H(x,y,s,t;u(s,t),D_1u(s,t))dsdt \\ &+ \int_0^1\int_0^1 K(x,y,s,t;u(s,t),D_1u(s,t))dsdt, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

với mọi $(x,y) \in \Omega = [0,1]^2$, trong đó $g : \Omega \to E$, $H : \Delta \times E^2 \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước và $\Delta = \{(x,y,s,t) \in \Omega \times \Omega : 0 \le s \le x, 0 \le t \le y\}$. Ký hiệu $D_1u = \frac{\partial u}{\partial x}$ chỉ đạo hàm riêng của hàm u xác định trên Ω, theo biến thứ nhất.

Chú ý rằng $E = C([0,1];\mathbb{R})$ là không gian Banach gồm tất cả các hàm liên tục $v : [0,1] \to \mathbb{R}$

với chuẩn

$$\|v\|_E = \sup_{0\le\eta\le 1} |v(\eta)|, v \in E.$$

Với mỗi $u \in X = C(\Omega; E)$ và $(x,y) \in \Omega$, $u(x,y)$ là một phần tử của E. Để thuận tiện, ta sử dụng ký hiệu sau:

$$u(x,y)(\eta) = u(x,y;\eta), 0 \le \eta \le 1.$$

Ví dụ 2.5.4 Xét phương trình (2.5.2) với $H = 0$ và các hàm $g : \Omega \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ được cho bởi

(i) Hàm K :

$$K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$$

$$(x,y,s,t;u,v) \longmapsto K(x,y,s,t;u,v),$$

$$K(x,y,s,t;u,v)(\eta) = k(x,y;\eta)\left[(st)^{\alpha_0}\sin\left(\frac{\pi u(\eta)}{2w_0(s,t;\eta)}\right) + (st)^{\alpha_1}\cos\left(\frac{2\pi v(\eta)}{D_1 w_0(s,t;\eta)}\right)\right],$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x,y,s,t;u,v) \in \Omega \times \Omega \times E^2$, với

$$\begin{cases} k,\ w_0 : \Omega \to E, \\ k(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta} x^{\tilde{\gamma}_1} |y - \tilde{\alpha}|^{\tilde{\gamma}_2}, \\ w_0(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta}\left[e^{x+y} + x^{\gamma_1}|y-\alpha|^{\gamma_2}\right],\ 0 \le \eta \le 1,\ (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

(ii) Hàm $g : \Omega \to E$,

$$g(x,y;\eta) = w_0(x,y;\eta) - \left(\frac{1}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_1)^2}\right)k(x,y;\eta),$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x,y) \in \Omega$, trong đó α, γ_1, γ_2, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, α_0, α_1 là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha,\ \tilde{\alpha} < 1,\ 0 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1,\ 0 < \tilde{\gamma}_2 < 1 < \tilde{\gamma}_1, \\ \pi(1+\tilde{\gamma}_1)\left(\frac{1}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{4}{(1+\alpha_1)^2}\right)\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1. \end{cases}$$

Chúng ta sẽ kiểm tra lại rằng các giả thiết (G), (K_1) của Định lý 2.1.1 là đúng.

Ví dụ 2.5.5 Xét phương trình (2.5.2) với $H = 0$ và các hàm $g : \Omega \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ như sau

(i) Hàm K :

$$K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$$

$$(x,y,s,t;u,v) \longmapsto K(x,y,s,t;u,v),$$

$$K(x,y,s,t;u,v)(\eta) = k(x,y;\eta)\left[(st)^{\alpha_0}\int_0^1 \left|\frac{u(\zeta)}{w_0(s,t;\zeta)}\right|^{1/4} d\zeta + (st)^{\alpha_1}\int_0^1 \left(\frac{v(\zeta)}{D_1 w_0(s,t;\zeta)}\right)^{1/3} d\zeta\right],$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x,y,s,t;u,v) \in \Omega \times \Omega \times E^2$, trong đó

$$\begin{cases} k,\ w_0 : \Omega \to E \\ k(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta} x^{\tilde{\gamma}_1} |y - \tilde{\alpha}|^{\tilde{\gamma}_2}, \\ w_0(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta}\left[e^{x} + x^{\gamma_1}|y-\alpha|^{\gamma_2}\right],\ 0 \le \eta \le 1,\ (x,y) \in \Omega. \end{cases}$$

(ii) Hàm $g : \Omega \to E$,

$$g(x,y;\eta) = w_0(x,y;\eta) - \left[\frac{1}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_1)^2}\right]k(x,y;\eta),$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x,y) \in \Omega$, trong đó α, γ_1, γ_2, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, α_0, α_1 là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha,\ \tilde{\alpha} < 1,\ 0 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1,\ 0 < \tilde{\gamma}_2 < 1 < \tilde{\gamma}_1, \\ 4(1+\tilde{\gamma}_1)\left[\frac{1}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_1)^2}\right]\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh rằng các giả thiết (G), $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$ của Định lý 2.1.2 là đúng.

Ví dụ 2.5.6 Xét phương trình (2.5.2) với các hàm $g : \Omega \to E$, $H : \triangle \times E^2 \to E$, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ được cho bởi

(i) Hàm H :

$$H : \Delta \times E^2 \to E$$
$$(x, y, s, t; u, v) \longmapsto H(x, y, s, t; u, v),$$
$$H(x, y, s, t; u, v)(\eta) = k(x, y; \eta) \left[(st)^{\alpha_0} \sin\left(\frac{\pi u(\eta)}{2w_0(s,t;\eta)} \right) + (st)^{\alpha_1} \cos\left(\frac{2\pi v(\eta)}{D_1 w_0(s,t;\eta)} \right) \right],$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x, y, s, t; u, v) \in \Delta \times E^2$, với

$$\begin{cases} k,\ w_0 : \Omega \to E, \\ k(x, y; \eta) = \frac{1}{1+\eta} x^{\tilde{\gamma}_1} |y - \tilde{\alpha}|^{\tilde{\gamma}_2}, \\ w_0(x, y; \eta) = \frac{1}{1+\eta} \left[e^{x+y} + x^{\gamma_1} |y - \alpha|^{\gamma_2} \right],\ 0 \le \eta \le 1,\ (x, y) \in \Omega. \end{cases}$$

(ii) Hàm K :

$$K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$$
$$(x, y, s, t; u, v) \longmapsto K(x, y, s, t; u, v),$$
$$K(x, y, s, t; u, v)(\eta) = k(x, y; \eta) \left[(st)^{\bar{\alpha}_0} \int_0^1 \left| \frac{u(\zeta)}{w_0(s,t;\zeta)} \right|^{1/4} d\zeta + (st)^{\bar{\alpha}_1} \int_0^1 \left(\frac{v(\zeta)}{D_1 w_0(s,t;\zeta)} \right)^{1/3} d\zeta \right],$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x, y, s, t; u, v) \in \Omega \times \Omega \times E^2$, trong đó $k(x, y; \eta)$, $w_0(x, y; \eta)$ được xác định như trên.

(iii) Hàm $g : \Omega \to E$,

$$g(x, y; \eta) = w_0(x, y; \eta) - \left[\frac{1}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_1)^2} + \frac{(xy)^{\alpha_0+1}}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{(xy)^{\alpha_1+1}}{(1+\bar{\alpha}_1)^2} \right] k(x, y; \eta),$$

$0 \le \eta \le 1$, $(x, y) \in \Omega$, trong đó α, γ_1, γ_2, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, α_0, α_1, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha,\ \tilde{\alpha} < 1,\ 0 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1,\ 0 < \tilde{\gamma}_2 < 1 < \tilde{\gamma}_1, \\ \left[\pi \left(\frac{2+\alpha_0+\tilde{\gamma}_1}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{8+4\alpha_1+4\tilde{\gamma}_1}{(1+\alpha_1)^2} \right) + \frac{4(1+\tilde{\gamma}_1)}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{4(1+\tilde{\gamma}_1)}{(1+\bar{\alpha}_1)^2} \right] \max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1. \end{cases}$$

Ta sẽ chứng minh rằng các giả thiết (G), (H_1), $(\bar{K}_1)$, $(\bar{K}_2)$, (HK) của Định lý 2.3.1 là đúng.

Kết luận chương 2

Chương 2 đã khảo sát phương trình (2.0.1) lần lượt theo các trường hợp $H \equiv 0$ và $H \neq 0$. Trước hết, bằng việc thiết lập một số giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, K, áp dụng nguyên lý ánh xạ co của Banach, sự tồn tại duy nhất nghiệm của (2.0.1) trong X_1 tương ứng với $H \equiv 0$ được chứng minh. Tiếp theo, tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của (2.0.1) trong X_1 được khẳng định nhờ vào việc xây dựng các giả thiết trên g, H, K và sử dụng các định lý điểm bất động phù hợp như định lý Schauder (trong trường hợp $H \equiv 0$) và định lý Krasnosel'skii (trường hợp $H \neq 0$). Cuối chương 2 là các ví dụ minh họa các kết quả đạt được của chương ứng với các trường hợp $E = \mathbb{R}$ và $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$.

Chương này đã tổng quát hóa các kết quả đã công bố trong [D1], [D4], [D5] và đang gửi đăng trong [D7]. Chi tiết hơn, trong [D1], phương trình (2.0.1) được xét với số biến là 2 và $E = \mathbb{R}$. Trong [D4], phương trình (2.0.1) cũng được xét với $E = \mathbb{R}$ nhưng mở rộng xét trong trường hợp N biến. Bài báo [D5] xét phương trình (2.0.1) với $H \equiv 0$, $N = 2$ và E là không gian Banach tổng quát.

Các phương pháp và kỹ thuật nêu trong chương 2 có thể áp dụng để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình có dạng sau, tuy nhiên, đây vẫn còn là bài toán mở:

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_{B_x} H(x, y; u(y), D_1 u(y), D_1^2 u(y)) dy \\ &+ \int_\Omega K(x, y; u(y), D_1 u(y), D_1^2 u(y)) dy,\ \forall x \in [0, 1]^N. \end{aligned} \tag{2.5.52}$$

Chương 3
Khảo sát phương trình vi tích phân phi tuyến cấp m

Chương này khảo sát một lớp phương trình vi tích phân phi tuyến cấp m ($m \geq 2$) nhận giá trị trong không gian Banach E có dạng:

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_\Omega H(x,y,u(y);D_1u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy \\ &+ \int_\Omega K(x,y,u(y);D_1u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy, \end{aligned} \tag{3.0.1}$$

với $x = (x_1,\cdots,x_N) \in \Omega = [0,1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$; H, $K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E$ là các hàm cho trước. Nội dung chính của chương 3 là chứng minh tập nghiệm của (3.0.1) khác rỗng và là tập compact, công cụ chính là sử dụng Định lý điểm bất động Krasnosel'skii trong không gian Banach X_m như đã thiết lập trong Mục 1.2 của Chương 1. Để minh họa các kết quả thu được cũng như chỉ ra tính hợp lý của các giả thiết đã thành lập, cuối chương 3 sẽ trình bày hai ví dụ cụ thể, tương ứng với $E = \mathbb{R}$ và với $E = C([0,1];\mathbb{R})$.

Một phần kết quả của chương 3 đã được công bố trong [D2] và đã được nhận đăng trong [D6].

3.1 Khảo sát phương trình cấp m nhận giá trị trong không gian Banach E

Xét $X = C(\Omega;E)$ và X_m là các không gian Banach, với chuẩn tương ứng được định nghĩa như ở Mục 1.1 và Mục 1.2 của chương 1:

$$X_m = \{u \in X : D_1^i u \in X,\ i = \overline{1,m}\},$$

$$\|u\|_{X_m} = \sum_{i=0}^m \left\|D_1^i u\right\|_X,\ u \in X_m.$$

Ta xây dựng các giả thiết cho các hàm g, H, K như sau:

$[G]$ $g \in X_m$;

$[H_1]$ $H \in C(\Omega \times \Omega \times E^{m+1};E)$, $D_1^i H \in C(\Omega \times \Omega \times E^{m+1};E)$, $i = \overline{1,m}$,
và tồn tại các hàm không âm $h_0, h_1,\cdots,h_m : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\|H(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m) - H(x,y;\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)\|_E \leq h_0(x,y)\sum_{j=0}^m \left\|u_j - \bar{u}_j\right\|_E$,

(ii) $\left\|D_1^i H(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m) - D_1^i H(x,y;\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)\right\|_E \leq h_i(x,y)\sum_{j=0}^m \left\|u_j - \bar{u}_j\right\|_E$
$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u_0,u_1,\cdots,u_m), (\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m) \in E^{m+1}$, $i = \overline{1,m}$;

$[\bar{K}_1]$ $K \in C(\Omega \times \Omega \times E^{m+1};E)$, $D_1^i K \in C(\Omega \times \Omega \times E^{m+1};E)$, $i = \overline{1,m}$,
và tồn tại các hàm không âm $\bar{k}_0, \bar{k}_1,\cdots,\bar{k}_m : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $\|K(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m)\|_E \leq \bar{k}_0(x,y)\left(1 + \sum_{j=0}^m \left\|u_j\right\|_E\right)$,

(ii) $\left\|D_1^i K(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m)\right\|_E \leq \bar{k}_i(x,y)\left(1 + \sum_{j=0}^m \left\|u_j\right\|_E\right)$,
$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u_0,u_1,\cdots,u_m) \in E^{m+1}$, $i = \overline{1,m}$;

$[\bar{K}_2]$ K, $D_1^i K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E$ là hoàn toàn liên tục sao cho với mọi tập con bị chặn J của E^{m+1}, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho $\forall x, \bar{x} \in \Omega$, $|x - \bar{x}| < \delta$ dẫn đến
$\sum_{i=0}^m \left\|D_1^i K(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m) - D_1^i K(\bar{x},y;u_0,u_1,\cdots,u_m)\right\|_E < \varepsilon$,
$\forall y \in \Omega$, $\forall (u_0,u_1,\cdots,u_m) \in J$;

$[HK]$ $\sum_{i=0}^m \left(\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega h_i(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_i(x,y)dy\right) < 1.$

Định lý 3.1.1 *Cho g, H, K thỏa mãn các giả thiết $[G]$, $[H_1]$, $[\bar{K}_1]$, $[\bar{K}_2]$, $[HK]$. Khi đó tập nghiệm của phương trình* (3.0.1) *là khác rỗng và compact trong X_m.*

3.2 Chú ý về phương trình (3.0.1) nhận giá trị thực

Xét phương trình (3.0.1) với $E = \mathbb{R}$, trong đó $g : \Omega \to \mathbb{R}$; H, $K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ là các hàm cho trước. Ta thành lập các giả thiết cho g, H, K như sau:

$[G']$ $g \in X_m$;

$[H_1']$ $H \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{m+1};\mathbb{R})$, $D_1^i H \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{m+1};\mathbb{R})$, $i = \overline{1,m}$,

và tồn tại các hàm không âm $h_0, h_1, \cdots, h_m : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $|H(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m) - H(x,y;\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)| \le h_0(x,y)\sum_{j=0}^m \left|u_j - \bar{u}_j\right|$,

(ii) $\left|D_1^i H(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m) - D_1^i H(x,y;\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)\right| \le h_i(x,y)\sum_{j=0}^m \left|u_j - \bar{u}_j\right|$

$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u_0,u_1,\cdots,u_m)$, $(\bar{u}_0,\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $i = \overline{1,m}$;

$[\bar{K}_1']$ $K \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{m+1};\mathbb{R})$, $D_1^i K \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{m+1};\mathbb{R})$, $i = \overline{1,m}$,

và tồn tại các hàm không âm $\bar{k}_0, \bar{k}_1, \cdots, \bar{k}_m : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $|K(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m)| \le \bar{k}_0(x,y)\left(1 + \sum_{j=0}^m \left|u_j\right|\right)$,

(ii) $\left|D_1^i K(x,y;u_0,u_1,\cdots,u_m)\right| \le \bar{k}_i(x,y)\left(1 + \sum_{j=0}^m \left|u_j\right|\right)$,

$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u_0,u_1,\cdots,u_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $i = \overline{1,m}$;

$[HK]'$ $\sum_{i=0}^m \left(\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega h_i(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_i(x,y)dy\right) < 1.$

Khi đó, ta có kết quả sau

Định lý 3.2.1 *Cho g, H, K thỏa mãn các giả thiết $[G']$, $[H_1']$, $[\bar{K}_1']$, $[HK]'$. Khi đó tập nghiệm của* (3.0.1) *là khác rỗng và compact trong X_m.*

Định lý 3.2.1 là một trường hợp riêng của Định lý 3.1.1 với $E = \mathbb{R}$. Trong phát biểu và chứng minh Định lý 3.2.1, không cần có giả thiết tương tự như $[\bar{K}_2]$ bởi vì, để kiểm tra tập $\mathcal{F} = C(B_M)$ là compact tương đối trong X_m, Bổ đề 1.2.3 được áp dụng thay vì Bổ đề 1.2.2, trong đó ta biết là điều kiện (i) của Bổ đề 1.2.2 đã được giảm nhẹ. □

3.3 Ví dụ minh họa

Phần này trình bày hai ví dụ minh họa các kết quả đạt được trong các Mục 3.1, 3.2 nêu trên đối với phương trình (3.0.1) có dạng cụ thể như sau

$$\begin{aligned} u(x,y) = g(x,y) &+ \int_0^1\int_0^1 H(x,y,s,t;u(s,t),D_1u(s,t),\cdots,D_1^m u(s,t))dsdt \\ &+ \int_0^1\int_0^1 K(x,y,s,t;u(s,t),D_1u(s,t),\cdots,D_1^m u(s,t))dsdt, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

với mọi $(x,y) \in \Omega = [0,1]^2$, trong đó $g : \Omega \to E$; H, $K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E$ là các hàm cho trước. Ký hiệu $D_1^i u = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$, chỉ đạo hàm riêng cấp $i = \overline{1,m}$ của hàm u xác định trên Ω theo biến x.

3.3.1 Ví dụ cho phương trình (3.3.1) với $E = \mathbb{R}$

Ví dụ 3.3.1 Xét phương trình (3.3.1) với $E = \mathbb{R}$ và các hàm $g : \Omega \to \mathbb{R}$; H, $K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$\begin{cases} H(x,y,s,t;u_0,u_1,\cdots,u_m) \\ \quad = k(x,y)\left[s^{\alpha_0}t^{\alpha_0}\sin\left(\frac{\pi u_0}{2w_0(s,t)}\right) + \sum_{j=1}^m s^{\alpha_j}t^{\alpha_j}\cos\left(\frac{2\pi u_j}{D_1^j w_0(s,t)}\right)\right], \\ K(x,y,s,t;u_0,u_1,\cdots,u_m) = k(x,y)\sum_{j=0}^m s^{\bar{\alpha}_j}t^{\bar{\alpha}_j}\left|\frac{u_j}{D_1^j w_0(s,t)}\right|^{\frac{1}{j+3}}, \\ g(x,y) = w_0(x,y) - \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{(1+\alpha_j)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_j)^2}\right)k(x,y), \end{cases}$$

trong đó

$$w_0(x,y) = e^x + x^{\gamma_1}\left|y-\alpha\right|^{\gamma_2},\ k(x,y) = x^{\tilde{\gamma}_1}\left|y-\tilde{\alpha}\right|^{\tilde{\gamma}_2},$$

và α, γ_1, γ_2, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, α_j, $\bar{\alpha}_j$ $j = \overline{0,m}$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha,\ \tilde{\alpha},\ \gamma_2,\ \tilde{\gamma}_2 < 1,\ \gamma_1 > m,\ \tilde{\gamma}_1 > m, \\ \sum_{j=0}^m \left(\frac{2\pi}{(1+\alpha_j)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_j)^2}\right)\left(1 + \sum_{i=1}^m i! C_{\tilde{\gamma}_1}^i\right)\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1, \end{cases}$$

trong đó $C_{\tilde{\gamma}_1}^i = \dfrac{\tilde{\gamma}_1(\tilde{\gamma}_1-1)\cdots(\tilde{\gamma}_1-i+1)}{i!}$.

Ta sẽ chứng minh rằng các giả thiết $[G']$, $[H_1']$, $[\bar{K}_1']$, $[HK]'$ của Định lý 3.2.1 là đúng.

3.3.2 Ví dụ cho phương trình (3.3.1) với $E = C([0,1];\mathbb{R})$

Ví dụ 3.3.2 Xét phương trình (3.3.1) với $E = C([0,1];\mathbb{R})$ và các hàm g, H, K được cho bởi

$$\begin{cases} H,\ K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E \\ \quad (x,y,s,t;u,v) \longmapsto H(x,y,s,t;u_0,u_1,\cdots,u_m), \\ \quad (x,y,s,t;u,v) \longmapsto K(x,y,s,t;u_0,u_1,\cdots,u_m), \\ H(x,y,s,t;u_0,u_1,\cdots,u_m)(\eta) \\ \quad = k(x,y;\eta)\left[s^{\alpha_0}t^{\alpha_0}\cos\left(\frac{2\pi u_0(\eta)}{w_0(s,t;\eta)}\right) + \sum_{j=1}^m s^{\alpha_j}t^{\alpha_j}\sin\left(\frac{\pi u_j(\eta)}{2D_1^j w_0(s,t;\eta)}\right)\right], \\ K(x,y,s,t;u_0,u_1,...,u_m)(\eta) = k(x,y;\eta)\sum_{j=0}^m s^{\bar{\alpha}_j}t^{\bar{\alpha}_j}\int_0^1 \left|\frac{u_j(\zeta)}{D_1^j w_0(s,t;\zeta)}\right|^{\frac{1}{j+3}} d\zeta, \\ g(x,y) = w_0(x,y) - \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{(1+\alpha_j)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_j)^2}\right)k(x,y), \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{cases} k,\ w_0 : \Omega \to E, \\ k(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta}x^{\tilde{\gamma}_1}\left|y-\tilde{\alpha}\right|^{\tilde{\gamma}_2}, \\ w_0(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta}\left[e^x + x^{\gamma_1}\left|y-\alpha\right|^{\gamma_2}\right],\ 0 \le \eta \le 1,\ (x,y) \in \Omega, \end{cases}$$

và α, γ_1, γ_2, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2$, α_j, $\bar{\alpha}_j$ $j = \overline{0,m}$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\begin{cases} 0 < \alpha,\ \tilde{\alpha},\ \gamma_2,\ \tilde{\gamma}_2 < 1,\ \gamma_1 > m,\ \tilde{\gamma}_1 > m, \\ \sum_{j=0}^m \left(\frac{5\pi}{(1+\alpha_j)^2} + \frac{2}{(1+\bar{\alpha}_j)^2}\right)\left(1 + \sum_{i=1}^m i! C_{\tilde{\gamma}_1}^i\right)\max\{\tilde{\alpha}^{\tilde{\gamma}_2}, (1-\tilde{\alpha})^{\tilde{\gamma}_2}\} < 1, \end{cases}$$

trong đó $C_{\tilde{\gamma}_1}^i = \dfrac{\tilde{\gamma}_1(\tilde{\gamma}_1-1)\cdots(\tilde{\gamma}_1-i+1)}{i!}$.

Ta sẽ chứng minh rằng các giả thiết $[G]$, $[H_1]$, $[\bar{K}_1]$, $[HK]$ của Định lý 3.1.1 là đúng.

Kết luận chương 3

Trên cơ sở xây dựng các giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, H, K, Định lý điểm bất động Krasnosel'skii đã được sử dụng để chứng minh tập nghiệm của phương trình (3.0.1) khác rỗng và compact trong không gian Banach X_m, trong cả hai trường hợp - phương trình nhận giá trị trong không gian Banach E tổng quát và trong trường hợp đặc biệt, $E = \mathbb{R}$. Các ví dụ minh họa ứng với các trường hợp $E = \mathbb{R}$ và $E = C([0,1];\mathbb{R})$ cũng được trình bày. Kết quả của chương này là sự tổng quát hóa các kết quả trong các bài báo [D2], [D6]. Trong [D2], phương trình (3.0.1) được xét với $H \equiv 0$, với số biến là $N = 2$ và $E = \mathbb{R}$. Trong [D6], phương trình (3.0.1) được xét với $H \equiv 0$.

Chương 3 đã phát triển, kế thừa các ý tưởng và phương pháp nghiên cứu của chương 2 nhưng với các phép tính toán và đánh giá phức tạp hơn, cũng như cần nhiều kỹ thuật tinh tế hơn để giải quyết. Các phương pháp và kỹ thuật nói trên, có thể áp dụng để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình có dạng sau

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_{B_x} H(x,y,u(y); D_1u(y), \cdots, D_1^m u(y))dy \\ &+ \int_{\Omega} K(x,y,u(y); D_1u(y), \cdots, D_1^m u(y))dy, \end{aligned}$$

tuy nhiên, bài toán vừa nêu vẫn còn là bài toán mở, cần tiếp tục nghiên cứu.

Chương 4

Khảo sát phương trình vi tích phân phi tuyến cấp m + n

Chương này xét phương trình vi tích phân phi tuyến cấp $m+n$ nhận giá trị trong không gian Banach E có dạng

$$u(x) = g(x) + \int_{\Omega} H(x,y;u(y), D_2^n D_1^m u(y))dy + \int_{\Omega} K(x,y;u(y), D_2^n D_1^m u(y))dy, \tag{4.0.1}$$

với $x = (x_1, \cdots, x_N) \in \Omega = [0,1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$; H, $K : \Omega \times \Omega \times E \to E$ là các hàm cho trước.

Tương tự, để chứng minh phương trình vi tích phân (4.0.1) có nghiệm, trước hết không gian Banach $X_{m,n}$ thiết lập ở Mục 1.3 của chương 1 được lựa chọn để sử dụng.

Tiếp theo, áp dụng Định lý điểm bất động Krasnosel'skii cùng với việc áp dụng các Bổ đề 1.3.3, 1.3.5 một cách thích hợp, chương này chứng minh tập nghiệm của phương trình (4.0.1) khác rỗng và compact. Các ví dụ minh họa cũng được nêu ra ở cuối chương.

Kết quả chương 4 là sự tổng quát hóa kết quả đã công bố trong bài báo [D3].

4.1 Khảo sát phương trình cấp $m+n$ nhận giá trị trong không gian Banach E

Xét $X = C(\Omega; E)$ và $X_{m,n}$ là các không gian Banach, với chuẩn tương ứng được định nghĩa như ở Mục 1.1 và Mục 1.3 của chương 1:

$$\begin{aligned} &X_{m,n} = \{u \in X : D_1^i u \in X,\ D_2^j D_1^m u \in X,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\}, \\ &\|u\|_{X_{m,n}} = \textstyle\sum_{i=0}^m \left\|D_1^i u\right\|_X + \sum_{j=1}^n \left\|D_2^j D_1^m u\right\|_X,\ u \in X_{m,n}. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Thành lập các giả thiết sau đây cho các hàm $g : \Omega \to E$; H, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ xuất hiện trong phương trình (4.0.1):

$[\mathbf{G}]$ $g \in X_{m,n}$;

$[\mathbf{H}_1]$ $H \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$, $D_1^i H$, $D_2^j D_1^m H \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, và tồn tại các hàm không âm h_i, $h_{m,j} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,m}$; $j = \overline{1,n}$, sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $\|H(x,y;u,v) - H(x,y;\bar{u},\bar{v})\|_E \le h_0(x,y)\left(\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E\right)$,

(ii) $\left\|D_1^i H(x,y;u,v) - D_1^i H(x,y;\bar{u},\bar{v})\right\|_E \le h_i(x,y)\left(\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E\right)$, $i = \overline{1,m}$,

(iii) $\left\| D_2^j D_1^m H(x,y;u,v) - D_2^j D_1^m H(x,y;\bar{u},\bar{v}) \right\|_E \leq h_{m,j}(x,y) \left(\|u-\bar{u}\|_E + \|v-\bar{v}\|_E \right), \ j = \overline{1,n},$
$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u,v)$, $(\bar{u},\bar{v}) \in E^2$;

$[\bar{\mathbf{K}}_1]$ $K \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$, $D_1^i K$, $D_2^j D_1^m K \in C(\Omega \times \Omega \times E^2; E)$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, và tồn tại các hàm không âm $\bar{k}_i$, $\bar{k}_{m,j} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,m}$; $j = \overline{1,n}$, sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $\|K(x,y;u,v)\|_E \leq \bar{k}_0(x,y) \left(1 + \|u\|_E + \|v\|_E\right)$,

(ii) $\left\| D_1^i K(x,y;u,v) \right\|_E \leq \bar{k}_i(x,y) \left(1 + \|u\|_E + \|v\|_E\right), \ i = \overline{1,m}$,

(iii) $\left\| D_2^j D_1^m K(x,y;u,v) \right\|_E \leq \bar{k}_{m,j}(x,y) \left(1 + \|u\|_E + \|v\|_E\right), \ j = \overline{1,n}$,

$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u,v) \in E^2$;

$[\bar{\mathbf{K}}_2]$ K, $D_1^i K$, $D_2^j D_1^m K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E$ là hoàn toàn liên tục sao cho với mọi tập con bị chặn J của E^2, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$, sao cho $\forall x$, $\bar{x} \in \Omega$, $|x - \bar{x}| < \delta$ dẫn đến

$$\sum_{i=0}^m \left\| D_1^i K(x,y;u,v) - D_1^i K(\bar{x},y;u,v) \right\|_E + \sum_{j=1}^m \left\| D_2^j D_1^m K(x,y;u,v) - D_2^j D_1^m K(\bar{x},y;u,v) \right\|_E < \varepsilon, \ \forall y \in \Omega, \ \forall (u,v) \in J;$$

$[\mathbf{HK}]$ $$\sum_{i=0}^m \left(\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega h_i(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \bar{k}_i(x,y)dy \right) + \sum_{j=1}^n \left(\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega h_{m,j}(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \bar{k}_{m,j}(x,y)dy \right) < 1.$$

Khi đó, ta thu được định lý sau đây về tập nghiệm của phương trình (4.0.1).

Định lý 4.1.1 *Cho g, H, K thỏa mãn các giả thiết* $[\mathbf{G}]$, $[\mathbf{H}_1]$, $[\bar{\mathbf{K}}_1]$, $[\bar{\mathbf{K}}_2]$, $[\mathbf{HK}]$. *Khi đó tập nghiệm của* (4.0.1) *là khác rỗng và compact trong $X_{m,n}$.*

Phương trình (4.0.1) được viết lại như sau

$$u(x) = (Uu)(x) + (Cu)(x), \ x \in \Omega, \tag{4.1.2}$$

trong đó

$$\begin{aligned} (Uu)(x) &= g(x) + \int_\Omega H(x,y;u(y), D_2^n D_1^m u(y))dy, \\ (Cu)(x) &= \int_\Omega K(x,y;u(y), D_2^n D_1^m u(y))dy, \ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Với $M > 0$, ta xét một quả cầu đóng $B_M = \{u \in X_{m,n} : \|u\|_{X_{m,n}} \leq M\}$. Đặt

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sum_{i=0}^m \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \left\| D_1^i H(x,y;0,0) \right\|_E dy + \sum_{j=1}^n \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \left\| D_2^j D_1^m H(x,y;0,0) \right\|_E dy, \\ \beta_1 &= \sum_{i=0}^m \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega h_i(x,y)dy + \sum_{j=1}^n \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega h_{m,j}(x,y)dy, \\ \beta_2 &= \sum_{i=0}^m \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \bar{k}_i(x,y)dy + \sum_{j=1}^n \sup_{x\in\Omega} \int_\Omega \bar{k}_{m,j}(x,y)dy. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Khi đó, ta có các bổ đề sau.

Bổ đề 4.1.2 *Với mọi $u, v \in B_M$, ta có các đánh giá sau*

(i) $\|Uu\|_{X_{m,n}} \leq \|g\|_{X_{m,n}} + \alpha_1 + M\beta_1$,

(ii) $\|Cv\|_{X_{m,n}} \leq (1+M)\beta_2$,

(iii) $\|Uu - U\bar{u}\|_{X_{m,n}} \leq \beta_1 \|u - \bar{u}\|_{X_{m,n}}$.

Bổ đề 4.1.3 *Tồn tại hằng số $M > 0$ sao cho $Uu + Cv \in B_M$, $\forall u, v \in B_M$.*

Bổ đề 4.1.4 *Toán tử $C : B_M \to X_{m,n}$ là liên tục.*

Bổ đề 4.1.5 *$\mathcal{F} = C(B_M)$ là compact tương đối trong $X_{m,n}$.*

4.2 Chú ý về phương trình (4.0.1) nhận giá trị thực

Xét phương trình (4.0.1) với $E = \mathbb{R}$, trong đó $g : \Omega \to \mathbb{R}$; $H, K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là các hàm cho trước. Ta thành lập các giả thiết sau cho các hàm g, H, K:

$[\mathbf{G}']$ $g \in X_{m,n}$;

$[\mathbf{H}_1']$ $H \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $D_1^i H$, $D_2^j D_1^m H \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, và tồn tại các hàm không âm h_i, $h_{m,j} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,m}$; $j = \overline{1,n}$, sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $|H(x,y;u,v) - H(x,y;\bar{u},\bar{v})| \leq h_0(x,y)\left(|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\right)$,

(ii) $\left|D_1^i H(x,y;u,v) - D_1^i H(x,y;\bar{u},\bar{v})\right| \leq h_i(x,y)\left(|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\right)$, $i = \overline{1,m}$,

(iii) $\left|D_2^j D_1^m H(x,y;u,v) - D_2^j D_1^m H(x,y;\bar{u},\bar{v})\right| \leq h_{m,j}(x,y)\left(|u-\bar{u}| + |v-\bar{v}|\right)$, $j = \overline{1,n}$,

$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u,v)$, $(\bar{u},\bar{v}) \in \mathbb{R}^2$;

$[\bar{\mathbf{K}}_1']$ $K \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $D_1^i K$, $D_2^j D_1^m K \in C(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$, và tồn tại các hàm không âm $\bar{k}_i$, $\bar{k}_{m,j} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $i = \overline{0,m}$; $j = \overline{1,n}$, sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $|K(x,y;u,v)| \leq \bar{k}_0(x,y)\left(1 + |u| + |v|\right)$,

(ii) $\left|D_1^i K(x,y;u,v)\right| \leq \bar{k}_i(x,y)\left(1 + |u| + |v|\right)$, $i = \overline{1,m}$,

(iii) $\left|D_2^j D_1^m K(x,y;u,v)\right| \leq \bar{k}_{m,j}(x,y)\left(1 + |u| + |v|\right)$, $j = \overline{1,n}$,

$\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$;

$$[\mathbf{HK}]' \quad \sum_{i=0}^m \left(\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega h_i(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_i(x,y)dy\right) + \sum_{j=1}^n \left(\sup_{x\in\Omega}\int_\Omega h_{m,j}(x,y)dy + \sup_{x\in\Omega}\int_\Omega \bar{k}_{m,j}(x,y)dy\right) < 1.$$

Khi đó, ta thu được định lý sau đây về tập nghiệm của phương trình (4.0.1).

Định lý 4.1.6 *Cho g, H, K thỏa mãn các giả thiết $[\mathbf{G}']$, $[\mathbf{H}_1']$, $[\bar{\mathbf{K}}_1']$, $[\mathbf{HK}]'$. Khi đó tập nghiệm của (4.0.1) là khác rỗng và compact trong $X_{m,n}$.*

Định lý 4.1.6 là một trường hợp riêng của Định lý 4.1.1 với $E = \mathbb{R}$. Trong phát biểu và chứng minh Định lý 4.1.6, không cần có giả thiết tương tự như $[\bar{\mathbf{K}}_2]$, bởi vì, để kiểm tra tập $\mathcal{F} = C(B_M)$ là compact tương đối trong $X_{m,n}$, Bổ đề 1.3.3 được áp dụng thay vì Bổ đề 1.3.5, trong đó ta biết là điều kiện (i) của Bổ đề 1.3.5 đã được giảm nhẹ. $\square$

4.3 Ví dụ minh họa

Phần này trình bày hai ví dụ minh họa các kết quả đạt được trong các Mục 4.1, 4.2 nêu trên đối với phương trình (4.0.1) có dạng cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} u(x,y) = g(x,y) &+ \int_0^1\int_0^1 H(x,y,s,t;u(s,t), D_2D_1^2u(s,t))dsdt \\ &+ \int_0^1\int_0^1 K(x,y,s,t;u(s,t), D_2D_1^2u(s,t))dsdt, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

với mọi $(x,y) \in \Omega = [0,1]^2$, trong đó $g : \Omega \to E$; $H, K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước thỏa một số điều kiện sẽ được chỉ ra dưới đây. Ký hiệu $D_2D_1^2u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, chỉ đạo hàm riêng cấp 3 của hàm $u(x,y)$ xác định trên Ω, lần lượt theo biến thứ nhất đến cấp 2 và sau đó theo biến thứ hai đến cấp 1. Trong hai ví dụ này, không gian hàm $X_{2,1}$ và chuẩn $\|\cdot\|_{X_{2,1}}$ như đã định nghĩa trong Mục 1.3, chương 1 sẽ được sử dụng (ứng với $m = 2$, $n = 1$), cụ thể là:

$$\begin{aligned} &X_{2,1} = \{u \in X = C(\Omega; E) : D_1^i u \in X,\ D_2D_1^2u \in X,\ i = \overline{1,2}\}, \\ &\|u\|_{X_{2,1}} = \textstyle\sum_{i=0}^2 \left\|D_1^i u\right\|_X + \left\|D_2D_1^2u\right\|_X,\ u \in X_{2,1}. \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

4.3.1 Ví dụ cho phương trình (4.3.1) với $E = \mathbb{R}$

Ví dụ 4.3.1 Xét phương trình (4.3.1) với $E = \mathbb{R}$ và các hàm $g : \Omega \to \mathbb{R}$; $H, K : \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ như sau

$$\begin{cases} H(x,y,s,t;u,v) = k(x,y)\left[4(st)^{\alpha_0}\sin\left(\frac{\pi u}{2w_0(s,t)}\right) + (st)^{\alpha_1}\cos\left(\frac{2\pi v}{D_2 D_1^2 w_0(s,t)}\right)\right], \\ K(x,y,s,t;u,v) = k(x,y)K_1(s,t;u,v), \\ g(x,y) = w_0(x,y) - \left[\frac{4}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_1)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_1)^2}\right]k(x,y), \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{cases} K_1(s,t;u,v) = (st)^{\bar{\alpha}_0}\left|\frac{u}{w_0(s,t)}\right|^{1/4} + (st)^{\bar{\alpha}_1}\left(\frac{v}{D_2 D_1^2 w_0(s,t)}\right)^{1/3}, \\ w_0(x,y) = e^{x+y} + \left|y - \frac{1}{2}\right|,\ k(x,y) = e^{x+y} + \left|y - \frac{1}{3}\right|, \end{cases}$$

và α_0, α_1, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$\left(\frac{2\pi}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{2\pi}{(1+\alpha_1)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_1)^2}\right)(4e^2+1) < 1.$$

Ta sẽ kiểm tra các giả thiết $[\mathbf{G}']$, $[\mathbf{H}_1']$, $[\bar{\mathbf{K}}_1']$, $[\mathbf{HK}]'$ của Định lý 4.1.6 là đúng.

4.3.2 Ví dụ cho phương trình (4.3.1) với $E = C([0,1];\mathbb{R})$

Ví dụ 4.3.2 Xét phương trình (4.3.1) với $E = C([0,1];\mathbb{R})$ và các hàm $g : \Omega \to E$; H, $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ như sau

$$\begin{cases} H, K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E \\ \quad (x,y,s,t;u,v) \longmapsto H(x,y,s,t;u,v), \\ \quad (x,y,s,t;u,v) \longmapsto K(x,y,s,t;u,v), \\ H(x,y,s,t;u,v)(\eta) = k(x,y;\eta)\left[4(st)^{\alpha_0}\sin\left(\frac{\pi u(\eta)}{2w_0(s,t;\eta)}\right) + (st)^{\alpha_1}\cos\left(\frac{2\pi v(\eta)}{D_2 D_1^2 w_0(s,t;\eta)}\right)\right], \\ K(x,y,s,t;u,v)(\eta) = k(x,y;\eta)K_1(s,t;u,v)(\eta),\ 0 \le \eta \le 1,\ (x,y) \in \Omega, \\ g(x,y) = w_0(x,y) - \left[\frac{4}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{1}{(1+\alpha_1)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_1)^2}\right]k(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \end{cases}$$

trong đó

$$\begin{cases} K_1(s,t;u,v)(\eta) = (st)^{\bar{\alpha}_0}\int_0^1 \left|\frac{u(\zeta)}{w_0(s,t;\zeta)}\right|^{\frac{1}{2}} d\zeta + (st)^{\bar{\alpha}_1}\int_0^1 \left|\frac{v(\zeta)}{D_2 D_1^2 w_0(s,t;\zeta)}\right|^{\frac{1}{3}} d\zeta, \\ w_0(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta}\left(e^{x+y} + \left|y - \frac{1}{2}\right|\right), \\ k(x,y;\eta) = \frac{1}{1+\eta}\left(e^{x+y} + \left|y - \frac{1}{3}\right|\right),\ 0 \le \eta \le 1,\ (x,y) \in \Omega, \end{cases}$$

và α_0, α_1, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$ là các hằng số dương thỏa mãn

$$2\left(4e^2+1\right)\left(\frac{2\pi}{(1+\alpha_0)^2} + \frac{2\pi}{(1+\alpha_1)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_0)^2} + \frac{1}{(1+\bar{\alpha}_1)^2}\right) < 1.$$

Ta sẽ kiểm tra các giả thiết $[\mathbf{G}]$, $[\mathbf{H}_1]$, $[\bar{\mathbf{K}}_1]$, $[\bar{\mathbf{K}}_2]$, $[\mathbf{HK}]$ của Định lý 4.1.1 là đúng.

Kết luận chương 4

Như vậy, bằng cách áp dụng Định lý Krasnosel'skii trên cơ sở xây dựng các giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, H, K, tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của phương trình (4.0.1) trong $X_{m,n}$ đã được chứng minh, ở đây phương trình được xét với E là không gian Banach tùy ý. Sự tồn tại nghiệm và tính chất của tập nghiệm của phương trình (4.0.1) vẫn còn đúng khi xem xét không gian Banach E trong trường hợp đặc biệt, $E = \mathbb{R}$, nhưng với các giả thiết được giảm nhẹ hơn. Cuối chương 4 là hai ví dụ minh họa các kết quả đạt được của chương, ứng với $E = \mathbb{R}$ và $E = C([0,1];\mathbb{R})$.

Chương 4 đã tổng quát hóa kết quả trong [D3], trong đó phương trình (4.0.1) được xét với $H \equiv 0$, số biến là $N = 2$ và $E = \mathbb{R}$. Do vế phải của phương trình chỉ xuất hiện một toán tử tích phân, nên trong [D3], nguyên lý ánh xạ co và Định lý Schauder đã được lựa chọn để khảo sát sự tồn tại nghiệm và tính chất của nghiệm của phương trình.

Các phương pháp và kỹ thuật đã sử dụng trong chương 4 có thể áp dụng để khảo sát sự tồn tại nghiệm của phương trình có dạng tổng quát hơn như sau, tuy nhiên đây vẫn còn là vấn đề mở cần tiếp tục nghiên cứu:

$$u(x) = g(x) + \int_{B_x} H(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy + \int_\Omega K(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy,\ \forall x \in [0,1]^N.$$

Kết luận

Trong luận án, chúng tôi đã nghiên cứu tính giải được và tính compact của tập nghiệm của các phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp 1, cấp m, cấp $m+n$ theo nhiều biến lần lượt có các dạng sau:

Dạng 1: Phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp 1:

$$u(x) = g(x) + \int_{B_x} H(x,y;u(y),D_1 u(y))dy + \int_\Omega K(x,y;u(y),D_1 u(y))dy,\ \forall x \in [0,1]^N. \quad (1)$$

Dạng 2: Phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp m $(m \geq 2)$:

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_\Omega H(x,y;u(y),D_1 u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy \\ &+ \int_\Omega K(x,y;u(y),D_1 u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy,\ \forall x \in [0,1]^N. \end{aligned} \quad (2)$$

Dạng 3: Phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp $m+n$:

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_\Omega H(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy \\ &+ \int_\Omega K(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy,\ \forall x \in [0,1]^N. \end{aligned} \quad (3)$$

Bằng các phương pháp và kỹ thuật của giải tích hàm phi tuyến, kết hợp với việc sử dụng các định lý điểm bất động phù hợp, luận án đạt được các kết quả mới sau đây:

1. Thiết lập các không gian hàm X_1, X_m, $X_{m,n}$ và chứng minh được các không gian hàm này là không gian Banach đồng thời đưa ra được tiêu chuẩn để một tập con trong mỗi không gian hàm này là tập compact tương đối.

2. Dưới một số giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, K, nguyên lý ánh xạ co của Banach được áp dụng để chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm của (1) trong X_1 tương ứng với $H \equiv 0$. Tiếp theo, cũng thiết lập các giả thiết phù hợp trên g, H, K, các định lý điểm bất động như Định lý Schauder (trong trường hợp $H \equiv 0$) và Định lý Krasnosel'skii (trường hợp $H \neq 0$) được áp dụng để chứng minh tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của (1) trong X_1.

3. Với một số giả thiết phù hợp trên g, H, K, Định lý Krasnosel'skii được áp dụng để chứng minh tập nghiệm của (2) là tập khác rỗng và compact trong X_m.

4. Áp dụng Định lý Krasnosel'skii trên cơ sở xây dựng được các giả thiết phù hợp trên các hàm cho trước g, H, K, chứng minh tính khác rỗng và compact của tập nghiệm của (3) trong $X_{m,n}$.

5. Sự tồn tại nghiệm và các tính chất của các tập nghiệm tương ứng nêu trên vẫn còn đúng khi xem xét không gian Banach E trong trường hợp đặc biệt, $E = \mathbb{R}$, nhưng với các giả thiết được giảm nhẹ hơn trong từng trường hợp cụ thể.

6. Các ví dụ cụ thể ứng với hai trường hợp đặc biệt của không gian Banach E là $E = \mathbb{R}$ và $E = C([0,1];\mathbb{R})$ cũng được trình bày để minh họa toàn bộ các kết quả đạt được nói trên, lần lượt cho các phương trình (1), (2), (3).

Các kết quả trên đây của luận án là sự phát triển và kế thừa các kết quả đã công bố trong [D1] - [D6] và gửi đăng trong [D7] và cũng đã được báo cáo trong các hội nghị khoa học chuyên ngành.

Trên cơ sở các kết quả thu được trong luận án, chúng tôi xin nêu những vấn đề có thể nghiên cứu, phát triển tiếp như sau:

- Sử dụng Định lý Krasnosel'skii để nghiên cứu phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp m nhận giá trị trong không gian Banach tổng quát có dạng:

$$\begin{aligned} u(x) = g(x) &+ \int_{B_x} H(x,y;u(y),D_1u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy \\ &+ \int_{\Omega} K(x,y;u(y),D_1u(y),\cdots,D_1^m u(y))dy, \end{aligned} \tag{4}$$

với mọi $x = (x_1,\cdots,x_N) \in \Omega = [0,1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$; $H : \Delta \times E^{m+1} \to E$; $K : \Omega \times \Omega \times E^{m+1} \to E$ là các hàm cho trước, $\Delta = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : y \in B_x\}$, $B_x = [0,x_1] \times \cdots \times [0,x_N]$.

- Sử dụng Định lý Krasnosel'skii để nghiên cứu phương trình vi tích phân hàm phi tuyến cấp $m+n$ nhận giá trị trong không gian Banach tổng quát có dạng

$$u(x) = g(x) + \int_{B_x} H(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy + \int_{\Omega} K(x,y;u(y),D_2^n D_1^m u(y))dy, \tag{5}$$

với mọi $x = (x_1,\cdots,x_N) \in \Omega = [0,1]^N$, trong đó $g : \Omega \to E$; $H : \Delta \times E^2 \to E$; $K : \Omega \times \Omega \times E^2 \to E$ là các hàm cho trước./.