ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HCM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ CÔNG NHÀN

MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC SUY BIẾN VỚI NGUỒN LOGARIT: TÍNH CHẤT BÙNG NỔ, NGHIỆM TOÀN CỤC VÀ TÍNH CHẤT TẮT DẦN

Ngành: Toán Giải tích
Mã số ngành: 62460102

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Tp. Hồ Chí Minh - Năm 2019

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

Người hướng dẫn khoa học:

1. PGS. TS. LÊ XUÂN TRƯỜNG
2. TS. HUỲNH QUANG VŨ

Phản biện 1:	TS. Hồ Ngọc Kỳ
Phản biện 2:	TS. Trần Trí Dũng
Phản biện 3:	TS. Đỗ Đức Tân
Phản biện độc lập 1:	TS. Nguyễn Minh Quân
Phản biện độc lập 2:	TS. Hồ Ngọc Kỳ

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án Cấp cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM,
vào hồi ...... giờ ......, ngày 21 tháng 12 năm 2019

Có thể tìm luận án trên tại các thư viện:

1. Thư viện Tổng hợp Quốc gia Tp. HCM
2. Thư viện trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG-HCM

TỔNG QUAN

Trong luận án chúng tôi nghiên cứu các bài toán biên–giá trị đầu cho một số lớp phương trình parabolic có dạng

$$\partial_t \mathcal{P}(u) + \operatorname{div} \mathcal{A}(x,t,u,\nabla u) = \mathcal{F}(x,t,u), \tag{1}$$

trong đó $\mathcal{P}$ là toán tử tuyến tính ($\mathcal{P} = I$ hoặc $\mathcal{P} = I - \Delta$), $\mathcal{A}$ và $\mathcal{F}$ là các toán tử phi tuyến xác định trên các không gian hàm thích hợp. Như đã biết các phương trình parabolic phi tuyến là một trong những công cụ mạnh mẽ cho phép mô hình hóa nhiều hiện tượng xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học ứng dụng như Vật lý, Hóa học, Sinh học, Kinh tế, Tài chính, v.v.

Về mặt toán học, khi nghiên cứu các phương trình parabolic có dạng

$$\partial_t \mathcal{P}(u) + \operatorname{div} \mathcal{A}(x,t,u,\nabla u) = \mathcal{F}(x,t,u), \tag{2}$$

người ta thường quan tâm nghiên cứu các vấn đề sau:

(i) Sự tồn tại nghiệm địa phương hay tính chỉnh địa phương của bài toán.

(ii) Khi nào phương trình có nghiệm toàn cục? Trong trường hợp đó, cần xem xét dáng điệu của nghiệm khi thời gian tiến ra vô hạn. Tìm các điều kiện đủ để nghiệm của phương trình bùng nổ tại tại thời gian hữu hạn.

Các kết quả liên quan đến tính chỉnh địa phương của các phương trình đạo hàm riêng cho đến nay đã được nghiên cứu một cách tương đối đầy đủ bởi nhiều tác giả như Friedman, Ladyzhenskaya, Evans, DiBenedetto, Raviart, Kalashnikov, Showalter và Ting, Brezis, v.v.

Vấn đề liên quan đến tính chất tồn tại toàn cục hay không tồn tại toàn cục (bùng nổ) cho nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng đã có một chặng đường lịch sử phát triển lâu dài. Trong đó tính chất bùng nổ cho nghiệm của các phương trình sóng á tuyến tính được nghiên cứu đầu tiên vào những năm 1950 bởi Keller, John và Kato cho lớp phương trình

$$u_{tt} = \Delta u + |u|^{p-1} u, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \quad (p > 1) \,. \tag{3}$$

Tính chất bùng nổ của nghiệm các phương trình parabolic cũng được quan tâm nghiên cứu bởi bởi nhiều nhà toán học như Friedman, Ladyzhenskaya, Kaplan, Fujita, Levine, Galaktionov và một số tác giả khác.

Các kết quả đầu tiên liên quan đến tính chất bùng nổ cho nghiệm của các phương trình parabolic là vào những năm 1960 bởi hai kết quả nổi tiếng của Kaplan và Fujita. Trong các bài báo của mình, Kaplan (1963) và Fujita (1966) lần lượt nghiên cứu các bài toán biên–giá trị đầu và bài toán Cauchy cho phương trình nhiệt có dạng

$$u_t = \Delta u + f\left(u\right), \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \tag{4}$$

Từ đây tính chất bùng nổ được nghiên cứu mở rộng cho nghiệm của nhiều phương trình parabolic khác nhau, cùng với đó là sự phát triển của nhiều phương pháp để nghiên cứu các vấn đề này. Chẳng hạn, Galaktionov (1994) đã mở rộng các kết quả của Fujita cho các lớp phương trình porous media và phương trình tiến hóa p-Laplace.

$$u_t = \Delta u^m + u^p, \quad \text{và} \quad u_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^\sigma \nabla u\right) + u^p, \quad (\sigma > 0),$$

và lớp phương trình khuếch tán - phản ứng dạng

$$u_t = \mathcal{A}(u) + f(u),$$

trong đó $\mathcal{A}$ là toán tử elliptic cấp hai, có thể phi tuyến và suy biến đóng vai trò là đại lượng khuếch tán và $f(u)$ là hàm trên tuyến tính theo u đóng vai trò là phản ứng.

Với hướng tiếp cận theo phương pháp năng lượng, vào những năm 1970, Levine (1973,1974) đã sử dụng phương pháp *phương pháp hàm lõm* để nghiên cứu tính chất bùng nổ cho nghiệm của các bài toán parabolic và hyperbolic dạng

$$\mathcal{P}u_t = -\mathcal{A}u + \mathcal{F}(u) \quad \text{và} \quad \mathcal{P}u_{tt} = -\mathcal{A}u + \mathcal{F}(u), \tag{5}$$

trong đó $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ là các toán tử tuyến tính đối xứng thỏa điều kiện $\mathcal{P} > 0$ và $\mathcal{A} \geq 0$ xác định trên các không gian Hilbert. Trong đó, Levine đã chỉ ra rằng với nguồn năng lượng đầu âm hay dữ kiện đầu lớn thì nghiệm của phương trình (5) là bùng nổ tại thời gian hữu hạn.

Trong trường hợp nguồn năng lượng đầu dương hay dữ kiện đầu nhỏ, Payne và Sattinger (1975) đã phát triển *phương pháp potential well* để nghiên cứu tính chất tồn tại toàn cục và bùng nổ tại thời gian hữu hạn cho nghiệm của bài toán biên–giá trị đầu cho lớp các phương trình parabolic và hyperbolic dạng

$$u_t = \Delta u + \mathcal{F}(u) \quad \text{và} \quad u_{tt} = \Delta u + \mathcal{F}(u),$$

với $\mathcal{F}$ có dạng tổng quát của hàm lũy thừa. Trong đó, các tác giả đã chỉ ra các tập hợp rời nhau $\mathcal{W}$ và $\mathcal{U}$ sao cho nếu dữ kiện đầu thuộc $\mathcal{W}$ thì nghiệm của bài toán tồn tại toàn cục và nếu dữ kiện đầu thuộc $\mathcal{U}$ thì nghiệm bài toán bùng nổ tại thời gian hữu hạn. Các tập hợp $\mathcal{W}$ và $\mathcal{U}$ tương ứng được gọi là *tập ổn định* và *tập không ổn định*. Phương pháp potential well được giới thiệu đầu tiên bởi Sattinger (1968) và Lions (1969) khi nghiên cứu tính chất tồn tại của nghiệm toàn cục cho các phương trình hyperpolic, sau đó được Payne và Sattinger sử dụng để nghiên cứu tính chất bùng nổ của nghiệm và nghiệm toàn cục cho cả phương trình hyperbolic và parabolic.

Tính chất bùng nổ cho nghiệm của các phương trình giả parabolic dưới tác động của nguồn dạng lũy thừa cũng được quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây, kết quả chi tiết có thể tham khảo các bài báo Xu (2013) và chuyên khảo của Al'shin và các đồng tác giả (2011).

Cho đến nay, tính chất bùng nổ của nghiệm các phương trình parabolic và giả parabolic dưới tác động của nguồn dạng lũy thừa hoặc dạng tổng quát của hàm lũy thừa đã được nghiên cứu tương đối rộng rãi, tuy nhiên có rất ít kết quả cho các phương trình với thành phần phi tuyến dạng logarit. Một vài kết quả gần đây cho các phương trình nhiệt có thể xem Chen và cộng sự (J. Math. Anal. Appl., 2015 và J. Differ. Equations. 2015). Trong đó các tác giả nghiên bài toán biên–giá trị đầu cho các phương trình

$$u_t - \Delta u = u \log |u|, \quad u_t - \Delta u_t - \Delta u = u \log |u|. \tag{6}$$

Bằng cách sử dụng phương pháp potential well, tác giả đã chỉ ra rằng với dữ kiện đầu thuộc vào tập ổn định thì nghiệm của bài toán là tồn tại toàn cục và tắt dần mũ; với trường hợp dữ kiện đầu thuộc vào tập không ổn định thì nghiệm của bài toán bùng nổ tại ∞. Trong khi đó với điều kiện tương tự và nguồn dạng lũy thừa $f(u) = |u|^{p-2} u$, $p > 2$ thì nghiệm của bài toán bùng nổ tại thời gian hữu hạn.

Xuất phát từ các kết quả trên, chúng tôi xét một số lớp phương trình parabolic suy biến gồm phương trình tiến hóa p-Laplace, phương trình giả parabolic chứa toán tử p-Laplace và phương trình khuếch tán phi tuyến kép dưới tác động của nguồn dạng logarit. Cụ thể, trong luận án chúng tôi nghiên cứu ba bài toán sau đây:

Bài toán 1: Chúng tôi xét bài toán Cauchy–Dirichlet cho phương trình tiến hóa p-Laplace dưới tác động của nguồn dạng logarit như sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f_p(u), & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{7}$$

trong đó $f_p(s) = |s|^{p-2} s \log(|s|)$ với $p > 2$.

Bài toán 2: Chúng tôi xét bài toán Cauchy–Dirichlet cho phương trình giả parabolic chứa toán tử p-Laplace sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta_p u = f_q(u), & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{8}$$

trong đó $f_q(s) = |s|^{q-2} s \log(|s|)$ với $q > 1$.

Bài toán 3: Chúng tôi xét bài toán Cauchy–Dirichlet cho phương trình khuếch tán phi tuyến kép sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p \left(|u|^{m-2} u\right) = f_q(u), & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{9}$$

trong đó $f_q(s) = |s|^{q-2} s \log(|s|)$ với $q > 1$.

Khi nghiên cứu tính chất nghiệm của ba bài toán trên, nội dung của luận án sẽ tập trung trả lời các câu hỏi sau đây:

1) Khi nào nghiệm của các bài toán trên là bùng nổ? khi có hiện tượng bùng nổ xảy ra thì nghiệm bùng nổ tại thời gian hữu hạn hay tại ∞?

2) Khi nào nghiệm của các bài toán trên tồn tại toàn cục? nếu nghiệm tồn tại toàn cục thì dáng điệu của nghiệm khi thời gian lớn sẽ như thế nào? nghiệm toàn cục có tắt dần hay không?

Để trả lời các câu hỏi này, chúng tôi tiến hành nghiên cứu luận án với tên gọi:

Một số lớp phương trình parabolic suy biến với nguồn logarit:
tính chất bùng nổ, nghiệm toàn cục và tính chất tắt dần.

Để thu được các kết quả trong luận án chúng tôi sử dụng các phương pháp của giải tích hàm phi tuyến như phương pháp xấp xỉ nghiệm Faedo–Galerkin, phương pháp compact và phương pháp toán tử đơn điệu. Đặc biệt, để thu được kết quả về tính chất tồn tại hay không tồn tại nghiệm toàn cục chúng tôi sử dụng phương pháp potential well được giới thiệu bởi Payne và Sattinger và phương pháp hàm lõm của Levine. Tính ưu việt của phương pháp này được thể hiện ở chỗ không những tính chất bùng nổ của nghiệm được nghiên cứu mà khi đó tính chất toàn toàn cục của nghiệm cũng được suy ra.

Cấu trúc của luận án bao gồm phần tổng quan, kiến thức chuẩn bị, ba chương chính, kết luận, danh mục công trình của tác giả luận án và tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Không gian Sobolev

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức logarit Sobolev). *Giả sử $1 < p < \infty$. Khi đó với mọi hàm $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ thỏa $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, dx = 1$, ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \log |u| \, dx \leq \frac{n}{p^2} \log \left[\mathcal{L}_p \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx \right], \tag{1.1.1}$$

trong đó $\mathcal{L}_p$ là hằng số cho bởi

$$\mathcal{L}_p = \frac{p}{n} \left(\frac{p-1}{e} \right)^{p-1} \pi^{-\frac{p}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(n\frac{p-1}{p}+1\right)} \right]^{\frac{p}{n}}. \tag{1.1.2}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$u(x) = \left(\pi^{n/2} \left(\frac{\sigma}{p} \right)^{n/p'} \frac{\Gamma(n/p'+1)}{\Gamma(n/2+1)} \right)^{-1/p} e^{-\frac{|x-\bar{x}|^{p'}}{\sigma}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.3}$$

với mọi $p > 1$, $\sigma > 0$ và $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dạng tham số của bất đẳng thức trên cho bởi.

Hệ quả 1.2. *Với các hằng số $p > 1$, $\mu > 0$, ta có:*

$$p \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \log \left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_p} \right) dx + \frac{n}{p} \log \left(\frac{p\mu e}{n\mathcal{L}_p} \right) \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \leq \mu \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \, dx, \tag{1.1.4}$$

với mọi $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$. Đặc biệt, nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn và $u \in$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ thì bằng cách đặt $u(x) = 0$ với $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ta có bất đẳng thức

$$p \int_\Omega |u(x)|^p \log\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_p}\right) dx + \frac{n}{p} \log\left(\frac{p\mu e}{n\mathcal{L}_p}\right) \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \le \mu \int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx, \tag{1.1.5}$$

với $\mu > 0$ tùy ý.

Định lý 1.3 (Bất đẳng thức logarit Gagliardo–Nirenberg)**.** *Cho trước $1 \le p < \infty$, $0 < q < p^*$ sao cho $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$ và $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Khi đó ta có bất đẳng thức*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^q}{\|u\|_q^q} \log\left(\frac{|u|^q}{\|u\|_q^q}\right) dx \le \frac{1}{1 - q/p^*} \log\left(C_{n,p,q}^q \frac{\|\nabla u\|_p^q}{\|u\|_q^q}\right) \tag{1.1.6}$$

Trong đó C là hằng số phụ thuộc vào n, p khi $p < n$, và phụ thuộc vào n, p và chặn trên của q khi $p \ge n$.

Hệ quả 1.4. *Với các giả thiết như trong Bổ đề 1.3, ta có*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q \log\left(\frac{|u|^q}{\|u\|_q^q}\right) dx + C_{n,p,q,\mu}^r \|u\|_q^q \le \mu \frac{r}{p} \|\nabla u\|_p^p + \mu \frac{p-r}{p} \|u\|_q^{\frac{(q-r)}{p-r} p},$$

với $\mu > 0$ tùy ý, $0 < r \le \min\{p, q\}$ và $C_{n,p,q,\mu}^r$ là hằng số xác định như sau

$$C_{n,p,q,\mu}^r = \frac{qp^*}{(p^* - q)\, r} \log\left(\frac{(p^* - q) r \mu e}{q p^* C_{n,p,q}^r}\right).$$

Nếu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là miền bị chặn và $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ thì bằng cách đặt $u(x) = 0$ khi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, ta có bất đẳng thức

$$\int_\Omega |u|^q \log\left(\frac{|u|^q}{\|u\|_q^q}\right) dx + C_{n,p,q,\mu}^r \|u\|_q^q \le \mu \frac{r}{p} \|\nabla u\|_p^p + \mu \frac{p-r}{p} \|u\|_q^{\frac{(q-r)}{p-r} p}. \tag{1.1.7}$$

1.2 Toán tử đơn điệu

1.3 Không gian hàm phụ thuộc thời gian

1.4 Một số bất đẳng thức cơ bản

Bổ đề sau được dùng để chứng minh tính chất tắt dần của nghiệm.

Bổ đề 1.5. *Giả sử $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là hàm không tăng thỏa*

$$\int_t^\infty f^{1+\sigma}(s)ds \leq \frac{1}{\omega} f^\sigma(0)f(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{1.4.8}$$

trong đó σ là một hằng số không âm. Khi đó ta có

(a) $f(t) \leq f(0)e^{1-\omega t}$, *với mọi $t \geq 0$, nếu $\sigma = 0$,*

(b) $f(t) \leq f(0)\left(\dfrac{1+\sigma}{1+\omega\sigma t}\right)^{1/\sigma}$, *với mọi $t \geq 0$, nếu $\sigma > 0$.*

Để chứng minh tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn, chúng tôi cần các bổ đề sau.

Bổ đề 1.6. *Giả sử $\psi \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$ là một hàm số không âm thỏa $\psi(0) > 0$ và*

$$\frac{d\psi}{dt}(t) \geq c\psi^\sigma(t), \quad \text{với h.h.} \quad t \geq 0, \tag{1.4.9}$$

trong đó $\sigma > 1$ và c là hằng số dương. Khi đó ta có

$$\psi(t) \geq \left(\frac{1}{\psi^{1-\sigma}(0) - c(\sigma-1)t}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}, \quad t \in [0, T_*)\,. \tag{1.4.10}$$

Từ đây suy ra

$$\lim_{t\to T_*^-} \psi(t) = \infty, \quad \text{với} \quad T_* = \frac{\psi^{1-\sigma}(0)}{c(\sigma-1)}.$$

Bổ đề 1.7. *Giả sử $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ là một hàm khả vi cấp hai và tồn tại $t_0 > 0$ thỏa*

$$\Phi(t_0) > 0 \quad \text{và} \quad \Phi'(t_0) > 0.$$

Giả sử thêm rằng Φ thỏa bất đẳng thức

$$\Phi(t)\Phi''(t) - \alpha(\Phi'(t))^2 \geq 0 \tag{1.4.11}$$

với mọi $t \geq t_0$, trong đó $\alpha > 1$ là hằng số. Khi đó tồn tại $T_* > 0$ sao cho $\lim\limits_{t\to T_*^-} \Phi(t) = \infty$. Cụ thể hơn ta có đánh giá

$$\Phi(t) \geq \left(\frac{1}{\Phi^{1-\alpha}(t_0) - \Phi_0(t-t_0)}\right)^{1/(\alpha-1)} \tag{1.4.12}$$

với mọi $t \in [t_0, T_*)$, trong đó $\Phi_0 = (\alpha-1)\Phi'(t_0)/\Phi(t_0) > 0$ là hằng số và

$$T_* = t_0 + \frac{\Phi(t_0)}{(\alpha-1)\Phi'(t_0)}.$$

CHƯƠNG 2

PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC CHỨA TOÁN TỬ p-LAPLACE VỚI THÀNH PHẦN PHI TUYẾN DẠNG LOGARIT

2.1 Giới thiệu

Trong chương này chúng tôi xét bài toán biên–giá trị đầu cho phương trình parabolic chứa toán tử p-Laplace với thành phần phi tuyến có dạng logarit như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f_p(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

trong đó $f_p(z) = |z|^{p-2}z \log(|z|)$. Nghiệm của bài toán được hiểu như sau:

Định nghĩa 2.1 (nghiệm yếu). *Một hàm u được gọi là nghiệm yếu của bài toán (2.1.1) trên $\Omega \times [0,T]$ nếu*

$$u \in L^\infty\left(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)\right), \quad u' \in L^{p'}\left(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$$

thỏa thỏa điều kiện đầu $u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và phương trình

$$\int_\Omega u'(t)w dx + \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) \cdot \nabla w dx = \int_\Omega f_p(u(t)) w dx, \tag{2.1.2}$$

với mọi $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và hầu hết $t \in [0,T]$.

Định nghĩa 2.2. *Giả sử $u(t) := u(x,t)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.1.1). Ta định nghĩa số thực dương $T_{\max}$ như sau:*

$$T_{\max} = \sup\left\{T > 0 : u(t) \text{ tồn tại trên } [0,T)\right\}.$$

(i) Nếu $T_{\max} = \infty$ thì $u(t)$ là nghiệm toàn cục.

(ii) Nếu $T_{\max} < \infty$ thì ta nói $u(t)$ không tồn tại toàn cục hay bùng nổ tại thời gian hữu hạn. Hơn nữa, nếu $\lim_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_2 = \infty$ thì $T_{\max}$ được gọi là thời gian bùng nổ.

2.2 Potential well và các đặc trưng

Để xây dựng các *tập ổn định* và *tập không ổn định* cho nghiệm của bài toán (2.1.1) chúng tôi giới thiệu các phiếm hàm I và J như sau

$$J(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{p} \int_\Omega |u|^p \log |u| \, dx + \frac{1}{p^2} \int_\Omega |u|^p \, dx, \tag{2.2.1}$$

$$I(u) = \|\nabla u\|_p^p - \int_\Omega |u|^p \log |u| \, dx. \tag{2.2.2}$$

Ta định nghĩa đa tạp Nehari

$$\mathcal{N} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : I(u) = \langle J'(u), u \rangle = 0 \right\}.$$

Bổ đề 2.3. *Với $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$. Ta có các tính chất sau:*

(1) $\lim_{\lambda \to 0^+} j(\lambda) = 0$ và $\lim_{\lambda \to \infty} j(\lambda) = -\infty$;

(2) tồn tại duy nhất $\lambda^* = \lambda^*(u) > 0$ sao cho $j'(\lambda^*) = 0$;

(3) $j(\lambda)$ tăng trên $(0, \lambda^*)$, giảm trên (λ^*, ∞) và đạt giá trị lớn nhất tại λ^*;

(4) $I(\lambda^* u) = 0$, $I(\lambda u) > 0$ nếu $0 < \lambda < \lambda^*$ và $I(\lambda u) < 0$ nếu $\lambda^* < \lambda < \infty$.

Ta ký hiệu R là hằng số xác định bởi $R := \left(\frac{p^2 e}{n \mathcal{L}_p}\right)^{n/p^2}$, trong đó $\mathcal{L}_p$ là hằng số được xác định trong Định lý 1.1.

Bổ đề 2.4. *Với $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$, ta có các khẳng định sau:*

(1) Nếu $0 < \|u\|_p < R$ thì $I(u) > 0$.

(2) Nếu $I(u) < 0$ thì $\|u\|_p > R$.

(3) Nếu $I(u) = 0$ thì $\|u\|_p \geq R$.

Tiếp theo ta định nghĩa *potential depth*

$$d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u). \tag{2.2.3}$$

Bổ đề 2.5. *Ta có các khẳng định sau:*

(a) $d = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \sup_{\lambda > 0} J(\lambda u).$

(b) d bị chặn dưới bởi

$$d \geq \frac{1}{p^2} \left(\frac{p^2 e}{n \mathcal{L}_p} \right)^{\frac{n}{p}} = \frac{R^p}{p^2} = M, \tag{2.2.4}$$

trong đó $\mathcal{L}_p$ là hằng số được xác định trong Định lý 1.1.

(c) Bài toán biến phân (2.2.3) có ít nhất một nghiệm không âm hay tồn tại hàm không âm u sao cho $u \in \mathcal{N}$ và $J(u) = d$.

Ký hiệu các tập

$$\mathcal{N}^+ := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I(u) > 0 \right\}, \; \mathcal{N}^- := \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : I(u) < 0 \right\}.$$

Bây giờ ta định nghĩa các tập ổn định $\mathcal{W}$ và không ổn định $\mathcal{U}$ như sau:

$$\mathcal{W} := \left(\mathcal{N}^+ \cap J^d \right) \cup \{0\} \quad \text{và} \quad \mathcal{U} := \mathcal{N}^- \cap J^d, \tag{2.2.5}$$

trong đó J^d được hiểu là tập ứng với năng lượng nhỏ hơn d. Từ các định nghĩa trên ta dễ dàng suy ra rằng

$$\mathcal{W} \cap \mathcal{U} = \emptyset \quad \text{và} \quad \overline{\mathcal{W}} \cup \overline{\mathcal{U}} = \overline{J^d}. \tag{2.2.6}$$

2.3 Sự tồn tại nghiệm địa phương

Định lý 2.6. *Giả sử $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Khi đó tồn tại số thực dương T_0 sao cho bài toán (2.1.1) có nghiệm yếu u trên $\Omega \times (0, T_0)$ thỏa bất đẳng thức năng lượng*

$$\int_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad t \in [0, T_0). \tag{2.3.1}$$

Hơn nữa, khi $p \geq n$ thì nghiệm yếu tìm được là duy nhất.

2.4 Tính chất tồn tại toàn cục và tính tắt dần

Định lý 2.7. *Giả sử $u_0 \in \overline{\mathcal{W}}$. Khi đó bài toán (2.1.1) có nghiệm yếu toàn cục duy nhất $u(t)$ thỏa*

$$\int_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad t \in [0, \infty). \tag{2.4.1}$$

Hơn nữa, nếu $J(u_0) \leq M$ thì nghiệm toàn cục tắt dần. Cụ thể hơn, ta có các đánh giá sau:

(i) Nếu $J(u_0) < M$ thì ta có

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 \left(\frac{p/2}{1 + \zeta(p-2) \|u_0\|_2^{p-2} t} \right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad t \geq 0, \tag{2.4.2}$$

trong đó $\zeta = \frac{1}{p} |\Omega|^{\frac{2-p}{2}} \log \frac{M}{J(u_0)} > 0$.

(ii) Nếu $J(u_0) = M$ thì tồn tại $t_* > 0$ và hằng số $C_* > 0$ sao cho

$$\|u(t)\|_2 \leq C_* \left(\frac{p/2}{1 + (p-2)t} \right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad t \geq t_*. \tag{2.4.3}$$

2.5 Tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn

Định lý 2.8. *Giả sử $u_0 \in \mathcal{U} \cap \overline{J^M}$ và $u(t)$ là nghiệm yếu địa phương của bài toán (2.1.1) ứng với dữ kiện đầu u_0 thỏa*

$$\int_0^t \|u'(s)\|_2^2 ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad \forall t \in [0, T_{max}). \tag{2.5.1}$$

Khi đó ta có các khẳng định sau:

(i) Nếu $J(u_0) \leq 0$ thì $u(t)$ không tồn tại toàn cục hay bùng nổ tại thời gian hữu hạn. Hơn nữa, ta có đánh giá

$$\|u(t)\|_2 \geq \left(\frac{p}{p\|u_0\|_2^{2-p} - (p-2) |\Omega|^{-\frac{p-2}{2}} t} \right)^{\frac{1}{p-2}},$$

và do đó $T_{\max} \leq \dfrac{p}{p-2} |\Omega|^{\frac{p-2}{2}} \|u_0\|_2^{2-p}$.

(ii) Nếu $0 < J(u_0) \leq M$ thì $u(t)$ không tồn tại toàn cục hay bùng nổ tại thời gian hữu hạn.

Nhận xét và kết luận Chương 2

- $\diamond$ Khi dữ kiện đầu $u_0 \in \mathcal{W}$ thì năng lượng khuếch tán lớn hơn năng lượng sinh bởi nguồn logarit và do đó nghiệm tồn tại toàn cục. Hơn nữa, nghiệm toàn cục là tắt dần trong không gian $L^2(\Omega)$ khi $J(u_0) \leq M$. Đặc biệt, khi $p = 2$ thì nghiệm của bài toán (2.1.1) là tắt dần mũ, xem Chen, J. Math. Appl. Anal. (2015).

- $\diamond$ Khi $u_0 \in \mathcal{U}$, $J(u_0) \leq M$ thì năng lượng khuếch tán nhỏ hơn năng lượng sinh bởi nguồn logarit, thì nghiệm bùng nổ tại thời gian hữu hạn trong không gian $L^2(\Omega)$. Đặc biệt, khi $p = 2$ thì nghiệm của bài toán (2.1.1) bùng nổ tại ∞, xem Chen, J. Math. Appl. Anal. (2015).

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG TRÌNH GIẢ PARABOLIC CHỨA TOÁN TỬ p-LAPLACE VỚI THÀNH PHẦN PHI TUYẾN DẠNG LOGARIT

3.1 Giới thiệu

Trong chương này chúng tôi xét bài toán biên–giá trị đầu cho phương trình giả parabolic với thành phần phi tuyến có dạng logarit như sau:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u_t - \Delta_p u = f_q(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

trong đó $f_q(z) = |z|^{q-2} z \log(|z|)$.

Định nghĩa 3.1 (nghiệm yếu). *Một hàm u được gọi là nghiệm yếu của bài toán (3.1.1)nếu*

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right), \quad u' \in L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right)$$

thỏa điều kiện đầu $u(0) = u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và phương trình

$$b\left(u'(t), w\right) + a\left(u(t), w\right) = \left\langle f_q\left(u(t)\right), w\right\rangle,$$

với mọi $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và h.h. $t \in [0, T]$, trong đó

$$b(u, v) := \langle u, v\rangle + \langle \nabla u, \nabla v\rangle \quad \text{và} \quad a(u, v) := \left\langle |\nabla u|^{p-2} \nabla u, \nabla v\right\rangle.$$

3.2 Potential well và các đặc trưng

Xét phiếm hàm Euler J và phiếm hàm Nehari I xác định trên không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$J(u) = \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q \log(|u|)\,dx + \frac{1}{q^2}\int_\Omega |u|^q\,dx, \tag{3.2.1}$$

$$I(u) = \|\nabla u\|_p^p - \int_\Omega |u|^q \log(|u|)\,dx. \tag{3.2.2}$$

Đa tạp Nehari được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{N} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\} : I(u) = \langle J'(u), u\rangle = 0\right\}.$$

Bổ đề 3.2. *Với $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$. Ta có các tính chất sau:*

(1) $\lim_{\lambda\to 0^+} j(\lambda) = 0$ và $\lim_{\lambda\to\infty} j(\lambda) = -\infty$;

(2) tồn tại duy nhất $\lambda^* = \lambda^*(u) > 0$ sao cho $j'(\lambda^*) = 0$;

(3) $j(\lambda)$ tăng trên $(0, \lambda^*)$, giảm trên (λ^*, ∞) và đạt giá trị lớn nhất tại λ^*;

(4) $I(\lambda^* u) = 0$, $I(\lambda u) > 0$ nếu $0 < \lambda < \lambda^*$ và $I(\lambda u) < 0$ nếu $\lambda^* < \lambda < \infty$.

Ta định nghĩa potential depth

$$d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u). \tag{3.2.3}$$

Bổ đề 3.3. *Ta có các khẳng định sau:*

(a) $d = \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \sup_{\lambda>0} J(\lambda u)$.

(b) Bài toán biến phân (3.2.3) có nghiệm và

$$0 < d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u). \tag{3.2.4}$$

Khi đó các tập ổn định $\mathcal{W}$ và không ổn định $\mathcal{U}$ được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{W} := \left(\mathcal{N}^+ \cap J^d\right) \cup \{0\} \quad \text{và} \quad \mathcal{U} := \mathcal{N}^- \cap J^d. \tag{3.2.5}$$

3.3 Nghiệm địa phương và nghiệm toàn cục

Định lý 3.4. *Giả sử $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) Nếu $1 < q < p$ thì bài toán (3.1.1) có nghiệm toàn cục u thỏa

$$\int_0^t \|u'(s)\|_{H^1(\Omega)}^2 ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.3.1}$$

(ii) Nếu $p \leq q < p\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ thì bài toán (3.1.1) có nghiệm địa phương. Hơn nữa, nghiệm tìm được là duy nhất khi $p \geq n$.

3.4 Tính chất tắt dần của nghiệm toàn cục

Định lý 3.5. *Giả sử $q \in [p, p^*)$ và $u_0 \in \overline{\mathcal{W}}$. Khi đó bài toán (3.1.1) có nghiệm toàn cục duy nhất $u(t)$ thỏa*

$$\int_0^t \|u'(s)\|_{H^1}^2 ds + J(u(t)) \leq J(u_0), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Hơn nữa, nghiệm toàn cục của bài toán tắt dần. Cụ thể hơn, ta có các khẳng định sau:

(i) Nếu $J(u_0) < d$ thì

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \left(\frac{pJ^{\frac{p-2}{p}}(u_0)}{2 + (p-2)CJ^{\frac{p-2}{p}}(u_0)\, t}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad t \geq 0,$$

trong đó C là hằng số dương.

(ii) Nếu $J(u_0) = d$ thì tồn tại các hằng số dương $t_* > 0$, ω_* và $C_* > 0$ sao cho

$$\|u(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C_* \left(\frac{p}{2 + \omega_*(p-2)t}\right)^{\frac{1}{p-2}}, \quad t \geq t_*.$$

3.5 Tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn

Định lý 3.6. *Giả sử rằng $q \in [p, p^*)$, $u_0 \in \mathcal{U}$ thỏa $J(u_0) \leq d$ và $u(t)$ là nghiệm yếu của bài toán (3.1.1). Khi đó nghiệm $u(t)$ không tồn tại toàn cục hay bùng nổ tại thời gian hữu hạn, tức là, tồn tại $T_* > 0$ sao cho*

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \infty.$$

Nhận xét và kết luận Chương 3

Ta nhận thấy rằng $q \geq p$ là điều kiện cần để hiện tượng bùng nổ xảy ra. Để có điều kiện đủ ta xét hai trường hợp sau:

- Khi $u_0 \in \mathcal{W}$ thỏa $J(u_0) \leq d$ thì nghiệm bài toán tồn tại toàn cục. Hơn nữa nghiệm tắt dần đại số trong không gian $H^1(\Omega)$. Lưu ý rằng tính chất tắt dần của nghiệm bài toán (3.1.1) trong trường hợp suy biến là khác với Chen và Tian, J. Differ. Equations, (2015) nghiệm tắt dần mũ khi $J(u_0) \leq M < d$.

- Khi $u_0 \in \mathcal{U}$ thỏa $J(u_0) \leq d$ thì nghiệm bùng nổ sau thời gian hữu hạn trong không gian $H^1(\Omega)$. Đặc biệt, Khi $p = q = 2$ thì nghiệm của bài toán (3.1.1) bùng nổ tại ∞ khi $J(u_0) \leq M$, xem Chen và Tian, J. Differ. Equations, (2015).

Bằng cách sử dụng kỹ thuật tương tự ở đây, ta có thể mở rộng kết quả của Chen và Tian, J. Differ. Equations, (2015) và của chính chúng tôi (Comput. Math. Appl. 2017) cho trường hợp năng lượng đầu $M < J(u_0) \leq d$.

Chương 4
Phương trình khuếch tán phi tuyến kép với thành phần phi tuyến dạng logarit

4.1 Giới thiệu

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán biên–giá trị đầu cho phương trình khuếch tán phi tuyến kép với thành phần phi tuyến dạng logarit sau

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p\left(u^{(m-1)}\right) = f_q(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

trong đó f_q có dạng logarit $f_q(s) = s^{(q-1)} \log|s|$ với m, p thỏa

$$(m-1)(p-1) > 1. \tag{4.1.2}$$

Ta xét bài toán tương đương:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(u) - \Delta_p(u) = (m'-1) f_\gamma(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1.3}$$

với $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và $\gamma = (m'-1)(q-1) + 1 > 1$.

Định nghĩa 4.1 (nghiệm yếu). *Một hàm u được gọi là nghiệm yếu của bài toán* (4.1.3) *nếu* $u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right)$, $\varphi(u) \in L^\infty(0, T; L^m(\Omega))$ *sao cho*

$$\frac{d}{dt}\varphi(u) \in L^{p'}\left(0, T; W^{-1,p'}(\Omega)\right) \quad \text{và} \quad \partial_t\left(|u|^{\frac{m'}{2}}\right) \in L^2(Q_T),$$

u thỏa điều kiện đầu $u(0) = u_0$ và phương trình (4.1.3) theo nghĩa sau

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt}\varphi\left(u(t)\right), v\right\rangle dt + \int_0^T \left\langle \left(\nabla u(t)\right)^{(p-1)}, \nabla v\right\rangle dt$$
$$= \left(m' - 1\right) \int_0^T \left\langle f_\gamma\left(u(t)\right), v\right\rangle dt,$$

với mọi $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

4.2 Potential well trong không gian hàm

Xét các phiếm hàm J và I như sau:

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx + \frac{m'-1}{\gamma^2}\int_\Omega |u|^\gamma\, dx - \frac{m'-1}{\gamma}\int_\Omega |u|^\gamma \log(|u|)\, dx,$$
$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \left(m'-1\right)\int_\Omega |u|^\gamma \log(|u|)\, dx.$$

Ta định nghĩa đa tạp Nehari

$$\mathcal{N} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\} : I(u) = \left\langle J'(u), u\right\rangle = 0\right\}. \tag{4.2.1}$$

Ta có bổ đề sau.

Bổ đề 4.2. *Lấy $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ và $\lambda > 0$. Khi đó $\lambda u \in \mathcal{N}$ khi và chỉ khi λ là điểm tới hạn của hàm số $\lambda \mapsto J(\lambda u)$, tức là $\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u) = 0$.*

Bổ đề 4.3. *Giả sử $2 \le p \le \gamma$ và $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) tồn tại duy nhất $\lambda_* := \lambda_*(u) > 0$ sao cho $I(\lambda_* u) = 0$, $I(\lambda u) > 0$ nếu $\lambda \in (0, \lambda_*)$ và $I(\lambda u) < 0$ nếu $\lambda > \lambda_*$.

(ii) hàm số $\lambda \mapsto J(\lambda u)$ đạt cực đại tại $\lambda = \lambda_*$ hay

$$\frac{d}{d\lambda}J(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_*} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{d^2}{d\lambda^2}J(\lambda u)\Big|_{\lambda=\lambda_*} < 0.$$

Ta định nghĩa potential depth

$$0 < d = \inf_{u\in\mathcal{N}} J(u).$$

có đặc trưng biến phân cho bởi

$$d = \inf\left\{\sup_{\lambda\ge 0} J(\lambda u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}\right\}, \tag{4.2.2}$$

Bổ đề 4.4. *Giả sử* $2 \leq p \leq \gamma < \frac{np}{n-p} =: p^*$. *Khi đó bài toán biến phân sau có nghiệm*

$$0 < d = \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

Xét tập các nghiệm không tầm thường của bài toán (4.1.3)

$$E = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} : -\Delta_p u = (m'-1) f_\gamma(u), u|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$
$$E_d = \{ u \in E : J(u) = d \}.$$

Ta định nghĩa tập ổn định $\mathcal{W}$ và tập không ổn định $\mathcal{U}$ như sau:

$$\mathcal{W} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J(u) < d, I(u) > 0 \right\} \cup \{0\}, \tag{4.2.3}$$
$$\mathcal{U} = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) : J(u) < d, I(u) < 0 \right\}. \tag{4.2.4}$$

Bổ đề 4.5. *(i)* $\mathcal{W}$ *là lân cận bị chặn của* 0 *trong không gian* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *tức là tồn tại các hằng số dương* $0 < r_1 < r_2$ *sao cho* $B(0, r_1) \subset \mathcal{W} \subset B(0, r_2)$;

(ii) $0 \notin \overline{\mathcal{U}}$;

(iii) $E_d \subset \mathcal{N}$ *và* $\overline{\mathcal{W}} \cap \overline{\mathcal{U}} = E_d$.

4.3 Nghiệm địa phương và nghiệm toàn cục

Định lý 4.6. *Cho trước* $T > 0$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *và* m, p *là các hằng số thỏa* (4.1.2). *Khi đó ta có các khẳng định sau:*

(i) Nếu $(m'-1)(q-1) < p-1$ *thì bài toán* (4.1.3) *có nghiệm yếu* u *trên* $[0, T_{\max})$ *với* $T_{\max} = T$ *thỏa* $U' \in L^2(Q_T)$ *và*

$$\int_0^t \|U'(\tau)\|_2^2 \, d\tau + J(u(t)) \leq J(u_0), \text{ h.h. } [0, T_{\max}), \tag{4.3.1}$$

trong đó $U(t) = \frac{2\sqrt{m'-1}}{m'} |u(t)|^{\frac{m'}{2}}$.

(ii) Nếu $(m'-1)(q-1) \geq p-1$ *thỏa*

$$(m'-1)(q-1) < p - 1 + \frac{m'p}{n} \quad \text{khi} \quad p < n,$$

thì bài toán (4.1.3) *có nghiệm yếu* u *thỏa* (4.3.1) *trên* $[0, T_{\max})$ *với* $0 < T_{\max} < T$.

4.4 Tính chất tắt dần của nghiệm toàn cục

Định lý 4.7. *Cho trước các hằng số m, p thỏa (4.1.2) và $q > 2$ sao cho*

$$p - 1 \leq (m' - 1)(q - 1) < p - 1 + \frac{p^2}{n - p} \quad \textit{khi} \quad p < n.$$

Khi đó nếu $u_0 \in \mathcal{W}$ thì bài toán (4.1.3) có nghiệm toàn cục $u(t)$ thỏa

$$u \in L^\infty\left(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)\right), \quad U' \in L^2(Q_T).$$

Hơn nữa, $u(t)$ thỏa

$$\|\nabla u(t)\|_p \leq \left(\frac{pJ^{\frac{p-m'}{p}}(u_0)}{m' + (p - m')CJ^{\frac{p-m'}{p}}(u_0)\, t}\right)^{\frac{1}{p-m'}} \quad \textit{với} \quad t \geq 0,$$

trong đó C là hằng số dương.

4.5 Tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn

Định lý 4.8. *Giả sử rằng các hằng số m, p thỏa (4.1.2) và $q > 2$ sao cho*

$$p - 1 \leq (m' - 1)(q - 1) < p - 1 + \frac{p^2}{n - p} \quad \textit{khi} \quad p < n.$$

Khi đó nếu $u_0 \in \mathcal{U}$ thì nghiệm của bài toán (4.1.3) không tồn tại toàn cục hay bùng nổ tại thời gian hữu hạn, tức là tồn tại $T_* > 0$ thỏa

$$\lim_{t \to T_*^-} \|u(t)\|_{m'}^{m'} = \infty.$$

4.6 Trường hợp năng lượng đầu tới hạn

Định lý 4.9. *Cho trước các hằng số m, p thỏa (4.1.2) và $q > 2$ sao cho*

$$p - 1 \leq (m' - 1)(q - 1) < p - 1 + \frac{p^2}{n - p} \quad \textit{khi} \quad p < n.$$

Giả sử thêm rằng $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ thỏa $J(u_0) = d$. Khi đó nghiệm $u(t)$ của bài toán (4.1.3) tồn tại toàn cục khi $I(u_0) > 0$ và bùng nổ tại thời gian hữu hạn khi

$I(u_0) < 0$. Hơn nữa, khi nghiệm toàn cục tồn tại ta có đánh giá

$$\|\nabla u(t)\|_p \leq \|\nabla u(t_1)\|_p \left(\frac{p}{m' + \omega_1(p-m')t}\right)^{\frac{1}{p-m'}}, \quad \textit{với} \quad t \geq t_1,$$

với $t_1 > 0$ và ω_1 là các hằng số dương.

Nhận xét và kết luận Chương 4

Định lý 4.6 cho ta thấy rằng hiện tượng bùng nổ chỉ có thể xảy ra khi

$$p - 1 \leq (m' - 1)(q - 1) \quad \text{hay} \quad (m - 1)(p - 1) \leq q - 1.$$

Khi năng lượng đầu $J(u_0) < d$, ta nhận thấy rằng tập ổn định $\mathcal{W}$ là tập hợp mà trong đó năng lượng khuếch tán trội hơn năng lượng của nguồn logarit và do đó nghiệm của bài toán tồn tại toàn cục và tắt dần khi $u_0 \in \mathcal{W}$; ngược lại tập không ổn định $\mathcal{U}$ là tập mà trong đó năng lượng của nguồn logarit trội hơn và do đó nghiệm của bài toán bùng nổ khi $u_0 \in \mathcal{U}$, xem Định lý 4.7 và Định lý 4.8.

Trong trường hợp $J(u_0) = d$, $\mathcal{N}^+$ là tập mà năng lượng khuếch tán trội hơn và $\mathcal{N}^-$ là tập mà năng lượng của nguồn logarit trội hơn. Và do đó nghiệm bài toán tồn tại toàn cục khi $u_0 \in \mathcal{N}_+$ và bùng nổ khi $u_0 \in \mathcal{N}_-$, Định lý 4.9.

KẾT LUẬN

Những kết quả mới đã được trình bày trong luận án bao gồm:

1. Các kết quả đạt được trong Chương 2 bao gồm:

   (i) Tính chất tồn tại và duy nhất của nghiệm địa phương khi dữ kiện đầu $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, Định lý 2.6.

   (ii) Tính chất tồn tại của nghiệm toàn cục khi $u_0 \in \overline{\mathcal{W}}$ và tính tắt dần đại số của nghiệm khi $J(u_0) \leq M < d$, Định lý 2.7.

   (iii) Tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn của nghiệm khi $u_0 \in \mathcal{U}$ và $J(u_0) \leq M < d$, Định lý 2.8.

2. Tiếp theo, các kết quả đạt được trong Chương 3 bao gồm:

   (i) Với dữ kiện đầu $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tính chất tồn tại toàn cục và không toàn cục của nghiệm phụ thuộc vào các tham số p và q, Định lý 3.4.

   (ii) Tính chất tắt dần của nghiệm toàn cục khi $u_0 \in \mathcal{W}$ thỏa $J(u_0) \leq d$, Định lý 3.5.

   (iii) Tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn của nghiệm khi $u_0 \in \mathcal{U}$ thỏa $J(u_0) \leq d$, Định lý 3.6.

3. Cuối cùng, trong Chương 4 chúng tôi thu được các kết quả sau:

   (i) Tính chất tồn tại của nghiệm địa phương và nghiệm toàn cục khi $w_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, Định lý 4.6.

   (ii) Tính chất tắt dần của nghiệm toàn cục $w_0 \in \mathcal{W}$, Định lý 4.7.

   (iii) Tính chất bùng nổ tại thời gian hữu hạn của nghiệm khi $w_0 \in \mathcal{U}$, Định lý 4.8.

(iv) Trong trường hợp $J(w_0) = d$ thì nghiệm yếu địa phương tồn tại toàn cục và tắt dần khi $I(w_0) > 0$ và bùng nổ tại thời gian hữu hạn khi $I(w_0) < 0$, Định lý 4.9.

Trên cơ sở những kết quả đã có, để kết thúc, chúng tôi cũng nêu ra một số vấn đề có thể nghiên cứu mở rộng như sau:

1. Nghiên cứu tính chất nghiệm của bài toán trong trường hợp $J(u_0) > d$?
2. Nghiên cứu trường hợp kỳ dị của các bài toán trong luận án?
3. Nghiên cứu các chặn trên và chặn dưới cho thời gian bùng nổ; nghiệm bùng nổ ở đâu; tốc độ bùng nổ của nghiệm, dáng điệu của nghiệm tại thời gian bùng nổ và có thể mở rộng nghiệm sau thời gian bùng nổ hay không?

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ

(N1) L. X. Truong, L. C. Nhan (2016), "Existence of solutions for p-Laplacian-like differential equation with multi-point nonlinear Neumann type boundary conditions at resonance", *Electron. J. Differ. Equ.*, 2016(206), 1–17.

(N2) D. H. Hoang, L. C. Nhan, L. X. Truong (2017), "Solvability of Fractional Differential Equation with Nonlocal Boundary Conditions at Resonance", *Vietnam J. Math.*, 45(4), 625–638.

(N3) L. C. Nhan, D. H. Hoang, L. X. Truong (2017), "Existence results for a class of high order differential equation associated with integral boundary conditions at resonance", *Arch. Math., Brno*, 53(2), 111–130.

(N4) L. C. Nhan, L. X. Truong (2017), "Global Solution and Blow-up for a Class of p-Laplacian Evolution Equations with Logarithmic Nonlinearity", *Acta Appl. Math.*, 151(1), 149–169.

(N5) L. C. Nhan, L. X. Truong (2017), "Global solution and blow-up for a class of pseudo p-Laplacian evolution equations with logarithmic nonlinearity", *Comput. Math. Appl.*, 73(9), 2076–2091.

(N6) L. C. Nhan, L. X. Truong (2018), "Existence and nonexistence of global solutions for doubly nonlinear diffusion equations with logarithmic nonlinearity", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2018(67), 1–25.