ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

=======o0o=======

VÕ VĂN ÂU

MỘT SỐ BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN

Ngành: **Toán Giải tích**
Mã số ngành: **62 46 01 02**

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

TP. Hồ Chí Minh - Năm 2019

Công trình được hoàn thành tại:

Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

* * * * * * * * * *

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TS. NGUYỄN HUY TUẤN

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh

Phản biện 1: PGS.TS. Nguyễn Bích Huy

Phản biện 2: PGS.TS. Mai Đức Thành

Phản biện 3: TS. Nguyễn Anh Triết

Phản biện độc lập 1: PGS.TS. Lê Thị Phương Ngọc

Phản biện độc lập 2: TS. Nguyễn Anh Triết

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở đào tạo họp tại Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh
vào lúc 9 giờ ngày 09 tháng 11 năm 2019

Có thể tìm hiểu luận án tại thư viện:

1. Thư viện Tổng hợp Quốc gia Tp.HCM
2. Thư viện trường Đại học Khoa học Tự nhiên-HCM

LỜI NÓI ĐẦU

Bài toán ngược cho phương trình đạo hàm riêng thường xuyên xuất hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau của công nghệ, vật lý, sinh học,... Đó là những bài toán khi các dữ kiện của quá trình vật lý không đo đạc được trực tiếp mà ta phải xác định chúng từ những dữ kiện đo đạc gián tiếp. Chúng tôi đề cập tới phương trình parabolic ngược thời gian. Đó là bài toán tìm nghiệm (hàm phân bố nhiệt độ, mật độ dân số,...) khi điều kiện tại thời điểm ban đầu không được biết mà ta phải xác định nó khi biết điều kiện tại thời điểm cuối (đó là lý do tại sao bài toán này được gọi là ngược thời gian). Theo chúng tôi được biết, số lượng công trình về bài toán ngược cho phương trình parabolic là rất lớn và được công bố trên các tạp chí uy tín của các nhà xuất bản lớn như: Springer, Elsevier, IOP science, Taylor Francis... Tuy nhiên các kết quả này thường tập trung nghiên cứu các bài toán với hàm nguồn thuần nhất hoặc tuyến tính. Các kết quả về hàm nguồn phi tuyến còn rất hiếm và chưa được nghiên cứu tỉ mỉ. Trong luận án này, chúng tôi sẽ tập trung trình bày ba chủ đề chính về bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến. Chủ đề 1, xét bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số hằng. Chủ đề 2, xét bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số phi địa phương. Chủ đề 3, xét bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số phi tuyến.

Bài toán parabolic thuận có rất nhiều dạng nghiên cứu khác nhau (dáng điệu nghiệm, tính nổ, tính tắt dần,...), nhưng với các Chủ đề 1, Chủ đề 2 và Chủ đề 3, chúng tôi tập trung nghiên cứu về sự không chỉnh của các loại bài toán này. Bài toán không chỉnh theo nghĩa của Hadamard, nghĩa là ít nhất một trong ba trường hợp sau xảy ra:

i) Bài toán không có nghiệm;

ii) Bài toán có nghiệm nhưng nghiệm không duy nhất;

iii) Bài toán có nghiệm nhưng nghiệm không ổn định.

Việc nghiên cứu các bài toán ngược không chỉnh bắt nguồn từ thực tế. Thật vậy, trong các vụ hỏa hoạn, chúng ta không thể nào đo được nhiệt độ tại thời điểm bắt đầu cháy hoặc nhiệt độ trong lúc đang cháy ($t_0 > 0$) mà ta chỉ xác định được nhiệt độ tại thời điểm sau đó ($t_1 > t_0$). Cũng tương tự, trong sinh học, việc xác định mật độ cá thể của một loài sinh vật tại thời điểm trong quá khứ là vấn đề quan tâm của các nhà sinh vật học. Tuy nhiên, việc khảo sát này rất khó khăn, chúng ta chỉ biết được mật độ cá thể tại thời điểm lúc quan sát. Trong thực tế, chúng ta không thể nào đo đạc dữ liệu một cách chính xác, nghĩa là sự đo đạc phải có sai số (do yếu tố ngoại cảnh hay dụng cụ đo đạc). Khi có sai số dù là rất nhỏ của dữ liệu tại thời điểm cuối, sẽ xảy ra sự chênh lệch rất lớn ở nghiệm tại thời điểm ban đầu. Thông thường khi đo đạc các dữ liệu, thì thường ít khi nhận được dữ liệu chính xác, mà là nhận được dữ liệu tương đối gần với dữ liệu chính xác mà thôi. Điều này gây rất nhiều khó khăn trong việc tính toán số liệu. Vì thế, nhiệm vụ chính để khảo sát các bài toán là đưa ra bài toán chỉnh hóa, tức là bài toán xấp xỉ của các bài toán này.

Dưới đây, là sự giới thiệu một số nét tổng quan về những nội dung trong luận án.
Nội dung thứ nhất, được trình bày ở Chương 2, liên quan đến bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số hằng trong không gian Hilbert

$$\begin{cases} u_t + Au = F(t; u(t)), & t \in (0, T), \\ u(T) = \varphi, \end{cases} . \tag{0.1}$$

với A là toán tử dương, tự liên hợp, không bị chặn trong H và $\varphi \in H$ cho trước.

Năm 1967, Lattes và Lions, đưa ra *phương pháp tựa đảo* (*Quasi-reversibility method* (*QR*)) để chỉnh hóa bài toán thuần nhất của bài toán (0.1). Các tác giả xấp xỉ A bởi toán tử $A^\varepsilon = A - \varepsilon A^2$, dẫn đến bài toán chỉnh sau

$$\begin{cases} u_t + (A - \varepsilon A^2) u = 0, & t \in (0, T), \\ u(T) = \varphi. \end{cases} \tag{0.3}$$

Bậc ổn định của phương pháp này là $e^{\frac{c}{\varepsilon}}$. Do đó, bậc ổn định này khá lớn.

Năm 1975, R.E. Showalter cũng dùng *phương pháp* (*QR*) với $A^\varepsilon = A(I + \varepsilon A)^{-1}$, $\varepsilon > 0$, để đưa ra bài toán xấp xỉ sau

$$\begin{cases} u_t + Au + \varepsilon A u_t = 0, & t \in (0, T), \\ u(T) = \varphi. \end{cases} . \tag{0.4}$$

Ưu điểm của phương pháp này ở chỗ $A(I + \varepsilon A)^{-1}$ là toán tử tuyến tính bị chặn. Điều này dẫn đến tính đặt chỉnh của bài toán, Hơn nữa, phương pháp này cho nghiệm xấp xỉ tốt hơn phương pháp của Lattes và Lions.

Năm 1973, K. Miller phát triển ý tưởng của Lattes và Lions, đưa ra *phương pháp ổn định tựa đảo* (*Stabilized quasi-reversibility* (*SQR*)). Các tác giả xét bài toán xấp xỉ sau

$$\begin{cases} u_t + R(A) u = 0, & t \in (0, T), \\ u(T) = \varphi, \end{cases} \tag{0.5}$$

ở đây $R(A)$ xấp xỉ A nếu A là số dương bé và $R(A)$ bị chặn trên khi A là số dương lớn. Có thể thấy $R(A) = A - \varepsilon A^2$ và $R(A) = \dfrac{A}{1+\varepsilon A}$ là tổng quát của toán tử A^ε trong (0.3) và (0.4) tương ứng.

Năm 1983, Showalter đưa ra phương pháp mới gọi là *phương pháp tựa giá trị biên* (*Quasi boundary value* (*QBV*)) để chỉnh hóa bài toán thuần nhất. Ý tưởng của phương pháp (*QBV*) là thay đổi giá trị biên thời gian

$$u(T) + \varepsilon u(0) = \varphi.$$

Phương pháp (*QBV*) tỏ ra rất hiệu quả trong việc chỉnh hóa các bài toán ngược thuần nhất.

Năm 2013, PGS.TS. Nguyễn Huy Tuấn, dùng *phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier* để chỉnh hóa bài toán (0.1), tác giả đưa ra sai số hội tụ dưới dạng bậc Hölder và cần điều kiện tiên nghiệm (*a priori*) có dạng sau

$$\sup_{t\in[0,T]} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2t\lambda_n} \left\langle u(t), \phi_n \right\rangle^2 < \infty, \tag{0.6}$$

điều kiện này cũng xuất hiện trong các công trình của nhóm nghiên cứu của GS.TS. Đặng Đức Trọng.

Như đã phân tích, có rất nhiều kết quả nghiên cứu bài toán (0.1) được đăng trên các tạp chí khoa học có uy tín. Tuy nhiên, một số kết quả trước đây cần các điều kiện tiên nghiệm khá mạnh (điển hình như (0.6)). Các điều kiện này làm giới hạn các lớp hàm thỏa mãn bài toán. Như một sự tiếp nối và mở rộng các kết quả nêu trên, chúng tôi xét bài toán (0.1) và đưa ra hai *phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier mới* để xấp xỉ nghiệm bài toán. Kết quả đạt được là các điều kiện tiên nghiệm thuộc các không gian hàm đơn giản hơn so với các kết quả trước đó. Kết quả trên đây được công bố trong [A1].

Nội dung thứ hai, được trình bày ở Chương 3, liên quan đến bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số phi địa phương

$$\begin{cases} u_t = a\left(\displaystyle\int_\Omega f(x)\, u(x,t)\, dx\right) \Delta u + F(x,t;u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.7}$$

trong đó, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ là tập mở, bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$ và ν là vectơ đơn vị trên $\partial\Omega$, hàm $\varphi \in L^2(\Omega)$ là dữ liệu cho trước tại thời điểm cuối $t = T$.

Bài toán (0.7) xuất hiện trong các mô hình ứng dụng trong các hiện tượng vật lý, hóa học như mô hình truyền nhiệt trong chất rắn với hệ số dẫn nhiệt biến thiên theo thời gian hay sự khuếch tán của các phản ứng hóa học trong quá trình ăn mòn vật liệu. Đặc biệt, trong sinh học bài toán này biểu thị mật độ cá thể của một loài sinh vật trong tự nhiên tại thời điểm t và vị trí x nơi loài sinh vật ấy sinh sống.

Năm 2009, GS.TS. Đặng Đức Trọng và các đồng tác giả đã nghiên cứu bài toán (0.7) với hệ số $a = 1$ bằng *phương pháp phương trình tích phân* (*method of integral equation*).

Gần đây nhất, năm 2016, PGS.TS. Nguyễn Huy Tuấn và đồng tác giả đã nghiên cứu bài toán (0.7) với hệ số $a = a(t) \in C([0,T])$. Dùng tính chất của nửa nhóm các toán tử, các tác giả đã đưa ra nghiệm xấp xỉ và bậc ổn định theo bậc Hölder $\varepsilon^{2t/T}$.

Tiếp nối các kết quả nêu trên, chúng tôi thấy rằng bài toán (0.7) với hệ số a phụ thuộc theo biến thời gian t và nghiệm u, tức là $a \equiv a(t,u)$ là chưa được nghiên cứu nhiều. Vì vậy, chúng tôi quan tâm khảo sát bài toán dạng (0.7). Kết quả trên đây được công bố trong [A2].

Nội dung cuối cùng, được trình bày ở Chương 4, liên quan đến bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số phi tuyến

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot \Big(a(x,t;u(x,t))\nabla u \Big) = F(x,t;u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.8}$$

trong đó $\varphi \in L^2(\Omega)$ cho trước.

Có thể thấy rằng các bài toán (0.1) và (0.7) với hệ số $a = 1$ và $a(t;u)$ theo thứ tự, là trường hợp đơn giản của bài toán (0.8). Đối với bài toán (0.8), chúng ta khó có thể chuyển bài toán về phương trình tích phân để áp dụng các phương pháp chỉnh hóa trực tiếp trên dạng nghiệm. Do đó, cần một phương pháp chỉnh hoá thật sự hiệu quả để áp dụng cho bài toán này. Kết quả trên đây được công bố trong [A3]. Mở rộng bài toán (0.8), chúng tôi xét hệ m-phương trình parabolic phi tuyến với $a := a(x,t)$ và được công bố trong [A4]. Kết quả mở rộng tiếp theo của bài toán (0.8) với $a := a(x,t;u;\nabla u)$ được công bố trong [A5].

Luận án được chia làm 04 chương.

Chương 1: Nhắc lại một số kiến thức về giải tích hàm, giải tích thực, khái niệm bài toán không chỉnh, vấn đề chỉnh hóa và một số kết quả cần biết.

Chương 2: Trình bày bài toán parabolic ngược thời gian với hệ số hằng trong không gian Hilbert. Áp dụng *phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier mới* để chỉnh hóa bài toán (0.1).

Mục đích của chúng tôi là giảm đi các điều kiện của nghiệm chính xác và hệ số Lipschitz so với các kết quả trước đó.

Chương 3: Bài toán ngược thời gian cho phương trình parabolic phi tuyến với hệ số phi địa phương. Dùng *phương pháp* (QR) để chỉnh hóa bài toán (0.7). Chương này xét hàm nguồn F thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục và Lipschitz địa phương.

Chương 4: Bài toán parabolic ngược thời gian phi tuyến với hệ số phi tuyến. Nội dung chương này trình bày *phương pháp chỉnh hóa* (QR) *có điều chỉnh* để thiết lập sai số hội tụ. Chúng tôi cũng xét hàm nguồn F thỏa cả hai điều kiện Lipschitz toàn cục và Lipschitz địa phương.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Nội dung chương này nhắc lại một số kiến thức về giải tích hàm, giải tích thực, khái niệm bài toán không chỉnh, vấn đề chỉnh hóa và một số kết quả cần biết.

Chương 2

BÀI TOÁN PARABOLIC PHI TUYẾN VỚI HỆ SỐ HẰNG

Cho H là không gian Hilbert với chuẩn $\|\cdot\|$ và tích vô hướng $\langle\cdot\rangle$, xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_t + Au = F(t;u(t)), & t \in (0,T), \\ u(T) = \varphi, \end{cases} . \tag{2.1}$$

với $\varphi \in H$, A là toán tử tự liên hợp dương, không bị chặn xác định trên một không gian con của không gian Hilbert H sao cho A^{-1} toán tử compact. Giả sử A có một cơ sở gồm các vectơ riêng trực chuẩn $\{\phi_n\}_{n\ge 1}$ trong H tương ứng với các giá trị riêng $\{\lambda_n\}_{n\ge1}$. Hàm nguồn $F:[0,T]\times H \to H$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục, nghĩa là

$$\|F(t;u)-F(t;v)\| \le K\|u-v\|, \tag{2.2}$$

với $K>0$ không phụ thuộc vào t,u,v.

Trong chương này, chúng tôi đưa ra *phương pháp chỉnh hóa chặt cụt chuỗi Fourier mới* để nhận sai số hội tụ với điều kiện của nghiệm chính xác u thỏa mãn

$$\|u(0)\|_{\mathbb{H}^r} \le E, \quad \text{với } r,\ E>0, \tag{2.3}$$

và

$$\|u(t)\|_H \le \overline{E}, \quad \text{với } \overline{E}>0. \tag{2.4}$$

Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên tạp chí **Acta Applicandae Mathematicae (SCI, Q2) [A1]**.

2.1 Kết quả chỉnh hóa thứ nhất

Trong phần này, ta giả sử $KT<1$, chúng tôi phát triển một *phương pháp chặt cụt mới* (*new truncation method*) với nghiệm chỉnh hóa được cho như sau

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(t) = &\sum_{\lambda_n \le M_\varepsilon} \left[e^{(T-t)\lambda_n}\varphi_n^\varepsilon - \int_t^T e^{(s-t)\lambda_n} F_n(u^\varepsilon)(s)ds \right]\phi_n \\ &+ \sum_{\lambda_n > M_\varepsilon} \left[\int_0^t e^{(s-t)\lambda_n} F_n(u^\varepsilon)(s)ds \right]\phi_n, \end{aligned} \tag{2.5}$$

trong đó, $M_\varepsilon > 0$ thỏa mãn $\lim_{\varepsilon \to 0^+} M_\varepsilon = +\infty$ và dữ liệu nhiễu $\varphi^\varepsilon \in H$ thỏa mãn

$$\left\|\varphi^\varepsilon - \varphi\right\| \le \varepsilon. \tag{2.6}$$

Định lí 2.1.1. *Giả sử hàm nguồn F thỏa mãn điều kiện Lipschitz toàn cục (2.2) với $K < \frac{1}{T}$. Khi đó, bài toán (2.5) có duy nhất nghiệm $u^\varepsilon \in C([0,T];H)$. Giả sử rằng bài toán (2.1) có duy nhất nghiệm $u \in C([0,T];H) \cap C([0,T];\mathbb{H}^r)$ thỏa mãn điều kiện*

$$\|u(0)\|_{\mathbb{H}^r} \le E, \quad \text{với } r,\ E > 0. \tag{2.7}$$

thì ta có đánh giá sai số sau

$$\|u^\varepsilon(t) - u(t)\| \le P_1 P_2(\varepsilon)\ e^{-tM_\varepsilon}, \quad \forall t \in [0,T], \tag{2.8}$$

trong đó

$$P_1 = \sqrt{\frac{2\left(1+\frac{1}{q}\right)}{1-(1+q)K^2T^2}}, \quad 0 < q < \frac{1}{K^2T^2} - 1,$$
$$P_2(\varepsilon) = e^{TM_\varepsilon}\varepsilon + M_\varepsilon^{-r}E,$$

với $M_\varepsilon > 0$ được chọn thỏa mãn: $\lim_{\varepsilon\to 0^+} M_\varepsilon^{-1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{TM_\varepsilon}\varepsilon = 0$.

Hệ quả 2.1.2. *Ta chọn $M_\varepsilon = \frac{1}{T+\alpha}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ với $\alpha > 0$ thì*

$$\|u^\varepsilon(t) - u(t)\| \le P_1\left[\varepsilon^{\frac{\alpha}{T+\alpha}} + \left(\frac{1}{T+\alpha}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-r} E\right]\ \varepsilon^{\frac{t}{T+\alpha}}, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.9}$$

Chú ý 2.1.3. *Điều kiện $KT < 1$ làm hạn chế lớp hàm nguồn F thỏa mãn. Trong phần sau, chúng tôi đưa ra phương pháp khác mà không cần điều kiện $KT < 1$.*

2.2 Kết quả chỉnh hóa thứ hai

Trong phần này, chúng tôi đưa ra phương pháp chỉnh hóa với $K > 0$ bất kỳ. Ta đưa ra nghiệm chỉnh hóa như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{\alpha(\varepsilon)}_{T_h,T_p}(\theta)(t) = &\sum_{\lambda_n \le \alpha(\varepsilon)}\left[e^{(T_p - t)\lambda_n}\langle\theta,\phi_n\rangle - \int_t^{T_p} e^{(s-t)\lambda_n} F_n\left(\mathbf{V}^{\alpha(\varepsilon)}_{T_h,T_p}(\theta)\right)(s)ds\right]\phi_n \\ &+ \sum_{\lambda_n > \alpha(\varepsilon)}\left[\int_{T_h}^t e^{(s-t)\lambda_n} F_n\left(\mathbf{V}^{\alpha(\varepsilon)}_{T_h,T_p}(\theta)\right)(s)ds\right]\phi_n,\end{aligned} \tag{2.10}$$

với $0 \le T_h \le t \le T_p \le T$ và $\theta \in C([T_h,T_p];H)$. Ở đây, $\alpha(\varepsilon) > 0$ thỏa $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\alpha(\varepsilon) = +\infty$.

Kết quả của phần này được thể hiện trong định lí sau.

Định lí 2.2.1. *Cho dãy số* $\{T_i\},\ i = 0,1,...,2m$ *thỏa mãn*

$$T_0 = 0 < T_1 = \overline{h}T < T_2 = 2\overline{h}T < ... < T_{2m} = 2m\overline{h}T = T, \tag{2.11}$$

trong đó $\overline{h} = \frac{1}{2m}$. *Ta kí hiệu*

$$\begin{cases} \alpha_k(\varepsilon) = \dfrac{m}{T2^{2m-k}} \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right), \\ \alpha_1(\varepsilon) = \dfrac{m}{T2^{2m-1}} \ln\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right), \end{cases} \quad \text{với mọi} \quad 2 \le k \le 2m. \tag{2.12}$$

Nghiệm chỉnh hóa $\mathbf{U}^\varepsilon(t)$ *được định nghĩa như sau* ($i = \overline{0, 2m-2}$)

$$\begin{cases} \mathbf{U}^\varepsilon(t) = \mathbf{V}^{\alpha_{2m-i}(\varepsilon)}_{T_{2m-i-2}, T_{2m-i}}(\mathbf{U}^\varepsilon(T_{2m-i}))(t), & \text{nếu} \quad T_{2m-i-1} \le t \le T_{2m-i}, \\ \mathbf{U}^\varepsilon(t) = \mathbf{V}^{\alpha_1(\varepsilon)}_{T_0, T_1}(\mathbf{U}^\varepsilon(T_1))(t), & \text{nếu} \quad 0 \le t \le T_1. \end{cases} \tag{2.13}$$

Nếu chọn $m \in \mathbb{N}^*$ *sao cho*

$$K(T_p - T_h) < 1 \Rightarrow 2K\overline{h}T < 1 \Rightarrow KT < m, \tag{2.14}$$

thì bài toán (2.10) *có nghiệm duy nhất* $\mathbf{V}^{\alpha(\varepsilon)}_{T_h, T_p}(\theta) \in C([T_h, T_p]; H)$. *Giả sử rằng bài toán* (2.1) *có nghiệm yếu* $u \in C([0,T]; H)$ *thỏa mãn*

$$\|u(t)\|_H \le \overline{E}, \quad 0 \le t \le T,\ \overline{E} > 0. \tag{2.15}$$

Khi đó, ta có đánh giá sai số

$$\begin{cases} \|\mathbf{U}^\varepsilon(t) - u(t)\| \le (2m-k)\Phi^{2m-k}(m,K,q)(1+\overline{E})\varepsilon^{\frac{1}{2^{2m-k}}}, & t \in [T_k, T_{k+1}], \\ \|\mathbf{U}^\varepsilon(t) - u(t)\| \le m\Phi^{2m}(m,K,q)(1+\overline{E})\varepsilon^{\frac{mt}{2^{2m-1}}}, & t \in [0, T_1], \end{cases} \tag{2.16}$$

trong đó $k = \overline{1, 2m-1}$

$$\Phi(m,K,q) = \frac{m\sqrt{2\left(1+\frac{1}{q}\right)}}{m - TK\sqrt{1+q}}, \tag{2.17}$$

với q *là số thực bất kỳ thỏa mãn* $0 < q < \frac{m^2}{T^2K^2} - 1$.

2.3 Kết luận Chương 2

Trong chương 2, dùng phương pháp chỉnh hóa chặt cụt chuỗi Fourier mới cho phương trình (2.1) để đưa ra hai dạng nghiệm chỉnh hóa (công thức (2.5) và (2.10)). - Sử dụng nghiệm chỉnh hóa được cho trong (2.5) để đạt được kết quả là:
+ Nghiệm u thuộc không gian Hilbert scale và thỏa điều kiện (2.7).

+ Đánh giá sai số (Định lí 2.1.1).

- Sử dụng nghiệm chỉnh hóa được cho trong (2.10) ta thu được kết quả là:

+ Giảm điều kiện Lipschitz thỏa với mọi $K > 0$ bất kỳ.

+ Nghiệm u chỉ cần thuộc không gian Hilbert và thỏa điều kiện (2.15).

+ Đánh giá sai số (Định lí 2.2.1).

Chương 3

BÀI TOÁN PARABOLIC PHI TUYẾN VỚI HỆ SỐ PHI ĐỊA PHƯƠNG

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán sau

$$\begin{cases} u_t = a\left(\int_\Omega f(x)\, u(x,t)\, dx\right)\Delta u + F(x,t;u(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \sigma} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

trong đó, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ là tập mở, bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$ và σ là vectơ pháp tuyến đơn vị trên biên $\partial\Omega$, hàm $\varphi \in L^2(\Omega)$ là dữ liệu cho trước tại thời điểm cuối $t = T$.

Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên tạp chí **Inverse Problems (SCI,Q1) [A2]**.

3.1 Một số giả thiết và kết quả cần có

Trong toàn bộ chương này, ta kí hiệu $\|\cdot\|$ và $\langle\cdot,\cdot\rangle$ lần lượt là chuẩn và tích vô hướng trong không gian $L^2(\Omega)$. Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) Hàm số $a: z \to a(z)$ là hàm số dương và liên tục với biến $z \in \mathbb{R}$;

(H_2) Tồn tại các số dương M_1 và M_2 sao cho

$$M_1 \le a(z) \le M_2, \quad \text{với mọi } z \in \mathbb{R};$$

(H_3) Tồn tại hằng số dương L thỏa mãn:

$$|a(z_1) - a(z_2)| \le L|z_1 - z_2|, \quad \text{với mọi } z_1, z_2 \in \mathbb{R};$$

(H_4) Hàm số $f \in L^2(\Omega)$;

(H_5) Dữ liệu cho trước $\varphi \in L^2(\Omega)$ và bị nhiễu bởi $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ thỏa mãn:

$$\|\varphi^\varepsilon - \varphi\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$I_{f,w}(t) = \int_\Omega f(x)\, w(x,t)\, dx, \quad \text{với } f \in L^2(\Omega), w \in C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

3.2 Kết quả chỉnh hóa bài toán thuần nhất

Ta xét bài toán thuần nhất của bài toán (3.1) như sau:

$$\begin{cases} u_t = a\left(I_{f,u}(t)\right)\Delta u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \sigma} = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Nghiệm của bài toán (3.2) được cho bởi phương trình tích phân sau

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(\lambda_n \int_t^T a\left(I_{f,u}(s)\right) ds\right)\varphi_n\right]\phi_n(x). \tag{3.3}$$

Như chúng ta đã biết, bài toán (3.2) là bài toán không chỉnh theo nghĩa của Hadamard. Vì vậy ta cần một phương pháp phù hợp để chỉnh hóa bài toán này.

■ **Phương pháp chỉnh hóa *Quasi-reversibility* (*QR*)**

Với $\beta := \beta(\varepsilon) > 0$, dùng *phương pháp Quasi-reversibility* (QR) ta đưa ra bài toán chỉnh hóa của bài toán (3.2) như sau:

$$\begin{cases} u_t^{\varepsilon} = a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(t)\right)\Delta u^{\varepsilon} + \beta a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(t)\right)\Delta u_t^{\varepsilon}, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu}(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u^{\varepsilon}(x,T) = \varphi^{\varepsilon}(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

Nghiệm của bài toán (3.4) được cho bởi phương trình sau

$$u^{\varepsilon}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(\int_t^T \frac{a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(s)\right)\lambda_n}{1+\beta a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(s)\right)\lambda_n} ds\right)\varphi_n^{\varepsilon}\right]\phi_n(x), \tag{3.5}$$

trong đó $\varphi_n^{\varepsilon} = \left\langle \varphi^{\varepsilon}(x), \phi_n(x)\right\rangle$.

Định lí 3.2.1. *Nếu* $(H_1)-(H_5)$ *thỏa thì bài toán* (3.4) *có nghiệm* $u^{\varepsilon} \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. *Giả sử* $\varphi \in \mathbb{G}_{M_2T;2}$ *và chọn* $\beta := \beta(\varepsilon) > 0$ *sao cho*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{\frac{T}{\beta}}\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \beta = 0. \tag{3.6}$$

Giả sử nghiệm u của bài toán (3.2) *thỏa* $u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \cap L^{\infty}\left(0,T; H^4(\Omega)\right)$. *Khi đó, ta có đánh giá sai số sau*

$$\left\| u^{\varepsilon}(\cdot,t) - u(\cdot,t)\right\| \le \sqrt{3}\left(e^{\frac{T}{\beta}}\varepsilon + M_2^2 T\beta \|u\|_{L^{\infty}(0,T;H^4(\Omega))}\right)e^{P_3}, \quad t \in [0,T], \tag{3.7}$$

với $P_3 = \dfrac{3}{2}T^2L^2\|f\|^2\|\varphi\|^2_{\mathbb{G}_{M_2T;2}}$.

Nếu chọn $\beta := \beta(\varepsilon) > 0$ *thỏa*

$$\beta = \frac{T}{\log\left(\dfrac{1}{\varepsilon^{1-\omega}}\right)}, \quad \text{với } \omega \in (0,1), \tag{3.8}$$

thì (3.7) *trở thành*

$$\left\| u^{\varepsilon}(\cdot,t) - u(\cdot,t) \right\| \leq \sqrt{3}\left(\varepsilon^{\omega} + \frac{M_2^2 T^2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\omega}}\right)} \|u\|_{L^{\infty}(0,T;H^4(\Omega))} \right) e^{P_3}, \quad t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

3.3 Kết quả chỉnh hóa bài toán phi tuyến

Với $\beta := \beta(\varepsilon) > 0$, sử dụng *phương pháp Quasi-reversibility* (*QR*), ta xét ra bài toán chỉnh hóa của bài toán (3.1) có dạng sau

$$\begin{cases} u_t^{\varepsilon} + a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(t)\right)\Delta^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = F(x,t;u^{\varepsilon}(x,t)), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u^{\varepsilon}}{\partial \nu}(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u^{\varepsilon}(x,T) = \varphi^{\varepsilon}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

với toán tử Δ^{ε} được định nghĩa như sau:

$$\Delta^{\varepsilon} w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\varepsilon} w_n(t) \phi_n(x), \quad \text{với } w_n(t) = \langle w(x,t), \phi_n(x) \rangle, \tag{3.11}$$

và

$$\lambda_n^{\varepsilon} = -\frac{1}{M_2 T} \log\left(\beta + e^{-M_2 T \lambda_n}\right), \quad \beta := \beta(\varepsilon) > 0. \tag{3.12}$$

Nghiệm của bài toán (3.10) được biểu diễn bởi phương trình tích phân sau:

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}(x,t) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[\exp\left(\lambda_n^{\varepsilon} \int_t^T a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(s)\right) ds \right) \varphi_n^{\varepsilon} \right] \phi_n(x) \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_t^T \exp\left(\lambda_n^{\varepsilon} \int_t^s a\left(I_{f,u^{\varepsilon}}(r)\right) dr \right) F_n\left(u^{\varepsilon}\right)(s)\, ds \right] \phi_n(x), \end{aligned} \tag{3.13}$$

với $\varphi_n^{\varepsilon} = \langle \varphi^{\varepsilon}, \phi_n(x) \rangle$, $F_n(u^{\varepsilon})(s) = \langle F(x,s;u^{\varepsilon}(x,s)), \phi_n(x) \rangle$.

Trong mục này, chúng tôi xét cả hai trường hợp của hàm nguồn F thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục và điều kiện Lipschitz địa phương.

3.3.1 Trường hợp hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục

Hàm nguồn $F : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục, nghĩa là tồn tại $K > 0$ độc lập với $u, v \in \mathbb{R}$, $t \in [0,T]$ sao cho

$$|F(x,t;u) - F(x,t;v)| \leq K|u - v|. \tag{3.14}$$

Với $\beta := \beta(\varepsilon) \in (0,1)$ và $w \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$, ta định nghĩa

$$\|w\|_{\beta,\infty} := \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\beta^{-\frac{t}{T}} \|w(\cdot,t)\| \right).$$

Nhận xét rằng $\|w(\cdot,t)\| \leq \|w\|_{\beta,\infty}$.

Các kết quả chính

Định lí 3.3.1. *Cho $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$, giả sử rằng $(H_1)-(H_5)$ thỏa và hàm F thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục* (3.14). *Khi đó, bài toán* (3.10) *có nghiệm $u^\varepsilon \in C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.*

Định lí 3.3.2. *Giả sử rằng $(H_1)-(H_5)$ và hàm F thỏa điều kiện* (3.14). *Khi đó, bài toán* (3.10) *có nhiều nhất một nghiệm thuộc vào $C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.*

Định lí 3.3.3. *Giả sử $(H_1)-(H_5)$ thỏa và hàm F thỏa điều kiện* (3.14)*, giả sử rằng nghiệm u của bài toán* (3.1) *thuộc vào $C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\cap C\left([0,T];\mathbb{G}_{M_2T;2}\right)$. Chọn $\beta := \beta(\varepsilon)\in(0,1)$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \beta = 0, \\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{\varepsilon}{\beta} = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Khi đó ta có đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa u^ε của bài toán (3.10) *và nghiệm chính xác u của bài toán* (3.1) *như sau*

$$\left\| u^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\right\| \le P_8\, e^{P_7(T-t)}\beta^{\frac{t}{T}}, \quad t\in(0,T). \tag{3.16}$$

Hơn nữa, tồn tại $t^\varepsilon \in (0,T)$ sao cho $\lim_{\varepsilon\to 0^+} t^\varepsilon = 0$, ta có

$$\| u^\varepsilon(\cdot,t^\varepsilon) - u(\cdot,0)\| \le \left(P_8\, e^{P_7(T-t)} + \|u_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\right)\sqrt{\frac{T}{\log\left(\frac{1}{\beta}\right)}}, \tag{3.17}$$

với $P_7 := K + \frac{1}{2} + \frac{L}{\lambda_1 M_2 T}\left\|f\right\| \|u\|_{C\left([0,T];\mathbb{G}_{M_2T;2}\right)} > 0, \quad P_8 := \frac{\varepsilon}{\beta} + \frac{\|u\|_{C\left([0,T];\mathbb{G}_{M_2T;2}\right)}}{\lambda_1\sqrt{T}} > 0.$

3.3.2 Trường hợp hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz địa phương

Trong mục này, ta xét hàm nguồn $F:\Omega\times[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa điều kiện Lipschitz địa phương, nghĩa là, với mỗi $B>0$, tồn tại hằng số $K(B)>0$ sao cho

$$|F(x,t;u) - F(x,t;v)\| \le K(B)|u-v|, \tag{3.18}$$

với mọi $u,v\in\mathbb{R}$ sao cho $|u|\le B, |u|\le B$.

Cho $B>0$, ta xét hàm $\widetilde{\mathscr{F}}_B$ định nghĩa bởi

$$\widetilde{\mathscr{F}}_B(x,t;u) := \begin{cases} F(x,t;B), & u > B, \\ F(x,t;u), & -B\le u\le B, \\ F(x,t;-B), & u<-B. \end{cases} \tag{3.19}$$

Ta chỉnh hóa bài toán (3.1) bởi bài toán sau:

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + a\left(I_{f,u^\varepsilon}(t)\right)\Delta^\varepsilon u^\varepsilon = \widetilde{\mathscr{F}}_{B^\varepsilon}(x,t;u^\varepsilon(x,t)), & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu}(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u^\varepsilon(x,T)=\varphi^\varepsilon(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

với $B^\varepsilon > 0$ thỏa $\lim_{\varepsilon\to0^+} B^\varepsilon = +\infty$.

Định lí 3.3.4. *Giả sử* $(H_1)-(H_5)$ *và* (3.18) *thỏa. Với* $\beta := \beta(\varepsilon)\in(0,1)$ *thỏa mãn* (3.15)*, nếu chọn* $B^\varepsilon > 0$ *sao cho* $\lim_{\varepsilon\to0^+} B^\varepsilon = +\infty$ *và*

$$K(B^\varepsilon) \le \frac{1}{T}\log\left(\log^\varrho\left(\frac{1}{\beta}\right)\right), \quad \varrho\in\left(0,\frac{1}{2}\right), \tag{3.21}$$

thì bài toán (3.20) *có nghiệm duy nhất* $u^\varepsilon \in C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. *Giả sử rằng nghiệm u của bài toán* (3.1) *thỏa*

$$u\in C\left([0,T];\mathbb{G}_{M_2T;2}\right)\cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\cap L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right).$$

Khi đó, ta có đánh giá sai số sau

$$\left\|u^\varepsilon(\cdot,t)-u(\cdot,t)\right\| \le P_{10}e^{P_9}\beta^{\frac{t}{T}}\log^\varrho\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad \forall t\in(0,T]. \tag{3.22}$$

Hơn nữa, với $\varepsilon>0$ *đủ nhỏ, tồn tại* $t^\varepsilon\in(0,T)$*, sao cho* $\lim_{\varepsilon\to0^+} t^\varepsilon = 0$*, ta có đánh giá sau*

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t^\varepsilon)-u(\cdot,0)\| \le \left[P_{10}e^{P_9}\log^\varrho\left(\frac{1}{\beta}\right)+\|u_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\right]\sqrt{\frac{T}{\log\left(\frac{1}{\beta}\right)}}, \tag{3.23}$$

với

$$P_9 := \left(\frac{1}{2}+\frac{L}{\lambda_1 M_2 T}\|f\|\,\|u\|_{C([0,T];\mathbb{G}_{M_2T;2})}\right)T,$$
$$P_{10} := \frac{\varepsilon}{\beta}+\frac{\|u\|_{C\left([0,T];\mathbb{G}_{M_2T;2}\right)}}{\lambda_1\sqrt{T}}.$$

3.4 Kết luận Chương 3

Chương 3 đã giải quyết được các vấn đề sau:

- Dùng phương pháp Quasi-reversibility để chỉnh hóa bài toán (3.1) trong cả hai trường hợp thuần nhất và phi tuyến.
- Đưa ra được đánh giá sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa trong trường hợp thuần nhất (Định lí 3.2.1), hàm nguồn thỏa điều kiện Lippschitz toàn cục (Định lí 3.3.3) và hàm nguồn Lipschitz địa phương (Định lí 3.3.4) .

Chương 4

BÀI TOÁN PARABOLIC VỚI HÀM NGUỒN VÀ HỆ SỐ PHI TUYẾN

Nội dung chính của chương này là khảo sát bài toán parabolic phi tuyến với hệ số phi tuyến dạng

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot \Big(a\left(x,t;u(x,t)\right) \nabla u \Big) = F\left(x,t;u(x,t)\right), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

trong đó $\varphi \in L^2(\Omega)$ cho trước, hàm nguồn $F(x,t;u)$ và $a(x,t;u)$ là hệ số phụ thuộc theo biến không gian x, thời gian t và nghiệm u. Bài toán này là bài toán không chỉnh theo nghĩa của Hadamard, vì vậy cần một phương pháp để chỉnh hóa. Mục tiêu của chúng tôi là xây dựng *phương pháp tựa đảo có điều chỉnh* (*Modified quasi-reversibility method*) để chỉnh hóa bài toán (4.1).

Chương này tổng hợp các kết quả được chúng tôi công bố trên tạp chí: **Journal of Mathematical Analysis and Applications (SCI,Q1) [A3]** và hai kết quả mở rộng được đăng trên **Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (SCI,Q1) [A4]** và **SIAM Journal on Mathematical Analysis (SCI,Q1) [A5]**.

4.1 Các giả thiết

Trong toàn bộ chương này, ta kí hiệu $\|\cdot\|$ và $\langle\cdot,\cdot\rangle$ lần lượt là chuẩn và tích vô hướng trong không gian $L^2(\Omega)$.

Ta thiết lập các giả thiết sau:

$(\overline{H}_1)$ Tồn tại $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ sao cho

$$\alpha_1 \le |a(w)| \le \alpha_2, \quad \forall w \in \mathbb{R};$$

$(\overline{H}_2)$ Tồn tại $L > 0$ sao cho

$$|a(x,t;w_1) - a(x,t;w_2)| \le L|w_1 - w_2|, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T),\ w_1, w_2 \in \mathbb{R};$$

$(\overline{H}_3)$ Dữ liệu φ bị nhiễu bởi $\varphi^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ thỏa mãn

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\| \le \varepsilon, \quad \text{với } \varepsilon > 0. \tag{4.2}$$

4.2 Các kết quả chính

Chúng tôi xét bài toán (4.1) với các trường hợp của hàm nguồn F thỏa: điều kiện Lipschitz toàn cục (3.14) và điều kiện Lipschitz địa phương (3.18).

4.2.1 Trường hợp hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục

Sử dụng phương pháp Quasi-reversibility có điều chỉnh, chúng tôi đưa ra bài toán chỉnh hóa sau:

$$\begin{cases} \partial_t u_\beta^\varepsilon - \nabla \cdot \left(a(x,t;u_\beta^\varepsilon)\nabla u_\beta^\varepsilon \right) - \left(\mathscr{A}_{\beta,\alpha_2}^\varepsilon - \mathscr{L} \right)(u_\beta^\varepsilon) = F\left(x,t;u_\beta^\varepsilon(x,t)\right), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_\beta^\varepsilon = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_\beta^\varepsilon(x,T) = \varphi^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.3}$$

trong đó,

$$\mathscr{A}_{\beta,\alpha_2}^\varepsilon = \mathscr{L} + \mathscr{C}_{\beta,\alpha_2}^\varepsilon,$$

với

$$\mathscr{L}(w) = \alpha_2 \Delta w = -\alpha_2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle w(x,t), \phi_n(x) \rangle \phi_n(x), \tag{4.4}$$

và

$$\mathscr{C}_{\beta,\alpha_2}^\varepsilon(w)(x,t) = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \beta \exp(\alpha_2 T \lambda_n)\right) \langle w(x,t), \phi_n(x) \rangle \phi_n(x), \tag{4.5}$$

với mọi hàm $w \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ và $\beta := \beta(\varepsilon) > 0$ là tham số chỉnh hóa.

Định lí 4.2.1. *Với $\beta := \beta(\varepsilon) \in \left(0, 1 - e^{-\alpha_2 T \lambda_1}\right)$ thỏa mãn*

$$\begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \beta = 0, \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \dfrac{\varepsilon}{\beta} = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Nếu các giả thiết $(\overline{H}_1)$-$(\overline{H}_3)$ và điều kiện Lipschitz toàn cục (3.14) thỏa thì bài toán (4.3) có nghiệm duy nhất $u_\beta^\varepsilon \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Giả sử rằng bài toán (4.1) có nghiệm duy nhất u thỏa

$$u \in C\left([0,T];\mathbb{G}_{\alpha_2 T;0}\right) \cap L^\infty\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right).$$

Khi đó, ta có đánh giá sai số sau

$$\|u^{\varepsilon}_{\beta}(\cdot,t)-u(\cdot,t)\| \le P_{11}e^{P_{12}(T-t)}\beta^{\frac{t}{T}}, \quad t\in(0,T], \tag{4.7}$$

trong đó,

$$P_{11} := \frac{\varepsilon}{\beta} + \frac{\|u\|_{C\left([0,T];\mathbb{G}_{\alpha_2 T;0}\right)}}{\sqrt{T}},$$
$$P_{12} := \frac{L^2\|u\|^2_{L^\infty\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right)}}{4\alpha_1} + K + \frac{1}{2}.$$

Với $\varepsilon>0$ đủ nhỏ, tồn tại $t^{\varepsilon}>0$ sao cho $\lim_{\varepsilon\to 0^+} t^{\varepsilon}=0$, ta có đánh giá sau

$$\left\|u^{\varepsilon}_{\beta}(\cdot,t^{\varepsilon})-u(\cdot,0)\right\| \le \left(P_{11}e^{P_{12}T}+\|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right)\sqrt{\frac{T}{\log\left(\frac{1}{\beta}\right)}}. \tag{4.8}$$

Chú ý 4.2.2. *Nếu chọn $\beta=\varepsilon^{\mu}$ với $\mu\in(0,1]$ trong (4.7) và (4.8), thì ta được*

$$\left\|u^{\varepsilon}_{\beta}(\cdot,t)-u(\cdot,t)\right\| \le e^{P_{12}(T-t)}\left[\varepsilon^{1-\mu}+\frac{\|u\|_{C\left([0,T];\mathbb{G}_{\alpha_2 T;0}\right)}}{\sqrt{T}}\right]\varepsilon^{\frac{\mu t}{T}}, \quad t\in(0,T], \tag{4.9}$$

và

$$\begin{aligned}&\left\|u^{\varepsilon}_{\beta}(\cdot,t^{\varepsilon})-u(\cdot,0)\right\| \\ &\le \left[e^{P_{12}(T-t)}\left(\varepsilon^{1-\mu}+\frac{\|u\|_{C\left([0,T];\mathbb{G}_{\alpha_2 T;0}\right)}}{\sqrt{T}}\right)+\|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]\sqrt{\frac{T}{\log(1/\varepsilon^{\mu})}}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

4.2.2 Trường hợp hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz địa phương

Khi hàm nguồn F thỏa điều kiện Lipschitz địa phương (3.18) và với cách xấp xỉ hàm F như trong (3.19). Khi đó, với $B^{\varepsilon}>0$ thỏa mãn $\lim_{\varepsilon\to 0^+} B^{\varepsilon}=+\infty$, ta xét bài toán sau

$$\begin{cases}\partial_t u^{\varepsilon}_{\beta}-\nabla\cdot\left(a(x,t;u^{\varepsilon}_{\beta})\nabla u^{\varepsilon}_{\beta}\right)-\left(\mathscr{A}^{\varepsilon}_{\beta,\alpha_2}-\mathscr{L}\right)(u^{\varepsilon}_{\beta})=\widetilde{\mathscr{F}}_{B^{\varepsilon}}\left(x,t;u^{\varepsilon}_{\beta}(x,t)\right), & (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u^{\varepsilon}_{\beta}(x,t)=0, & (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u^{\varepsilon}_{\beta}(x,T)=\varphi^{\varepsilon}(x), & x\in\Omega.\end{cases} \tag{4.11}$$

Định lí 4.2.3. *Cho $\beta:=\beta(\varepsilon)\in\left(0,1-\exp(-\alpha_2 T\lambda_1)\right)$ thỏa (4.6) và giả sử $(\overline{H}_1)-(\overline{H}_3)$ và (3.18) thỏa. Khi đó bài toán (4.11) có nghiệm duy nhất $u^{\varepsilon}_{\beta}\in C([0,T];L^2(\Omega))$. Chọn $B^{\varepsilon}>0$ sao cho $\lim_{\varepsilon\to 0^+} B^{\varepsilon}=+\infty$ và*

$$K(B^{\varepsilon}) \le \frac{1}{T}\log\left(\log^{\zeta(t)}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right), \ \forall t\in[0,T], \tag{4.12}$$

trong đó $\zeta(t) = \min\left\{\frac{t}{T}, \frac{1}{2}\right\}$*, ta có đánh giá sai số sau*

$$\left\| u_\beta^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t) \right\| \le P_{11} e^{P_{13}(T-t)} \beta^{\frac{2t}{T}} \log^{\zeta(t)}\left(\frac{1}{\beta}\right), \ \forall t \in (0,T]. \tag{4.13}$$

Với $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ, tồn tại* $t^\varepsilon > 0$ *sao cho* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} t^\varepsilon = 0$*, ta có*

$$\left\| u_\beta^\varepsilon(\cdot,t^\varepsilon) - u(\cdot,0) \right\| \le \left[P_{11} e^{P_{13}T} \log^{\zeta(t)}\left(\frac{1}{\beta}\right) + \|u_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right] \sqrt{\frac{T}{\log\left(\frac{1}{\beta}\right)}}, \tag{4.14}$$

trong đó $P_{13} := \dfrac{L^2 \|u\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}}{4\alpha_1} + \frac{1}{2}$ *và hằng số* P_{11} *được định nghĩa trong Định lí 4.2.1.*

Chú ý 4.2.4. *1) Nếu* $\beta := \beta(\varepsilon) \in (0, 1 - \exp(-\alpha_2 T \lambda_1))$ *thỏa mãn* (4.6) *thì* $\| u_\beta^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t) \|$ *tiến dần về* 0 *khi* $\varepsilon \to 0^+$*, với mọi* $t \in (0,T)$.

2) Nếu chọn $0 < \zeta(t^\varepsilon) < 1/2$ *thì vế phải của* (4.14) *tiến dần về* 0 *khi* $\varepsilon \to 0^+$.

4.3 Các kết quả mở rộng

Các kết quả sau đây là trường hợp mở rộng của bài toán (4.1), chúng tôi không trình bày chi tiết các chứng minh trong luận án này.

4.3.1 Trường hợp hệ số $a := a(x,t)$

Trong bài toán (4.1), lấy $a(x,t;u) = a(x,t)$, xét hệ gồm m phương trình sau:

$$\begin{cases} \partial_t u_1 - \nabla \cdot \Big(a_1(x,t) \nabla u_1 \Big) = F_1(x,t;u_1;...;u_m), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ \partial_t u_m - \nabla \cdot \Big(a_m(x,t) \nabla u_m \Big) = F_m(x,t;u_1;...;u_m), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_k(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_k(x,T) = \varphi_k(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

với $k = \overline{1,m}$.

Dùng *phương pháp Quasi-reversibility* để chỉnh hóa bài toán (4.15), ta có kết quả sau:

Định lí 4.3.1. *Với* $m \in \mathbb{N}^*, m \ge 2$*, ta có*

$$\left\| \mathscr{U}^{\varepsilon,\beta}(\cdot,t) - \mathscr{U}(\cdot,t) \right\|_{[L^2(\Omega)]^m} \le C e^{(mK+1/2)(T-t)} \beta^{\frac{t}{T}}, \quad \forall t \in (0,T]. \tag{4.16}$$

Hơn nữa, với $\varepsilon > 0$*, tồn tại* $t^\varepsilon \in (0,T)$ *sao cho* $\lim_{\varepsilon \to 0^+} t^\varepsilon = 0$*, ta có*

$$\left\| \mathscr{U}^{\varepsilon,\beta}(\cdot,t^\varepsilon) - \mathscr{U}(\cdot,0) \right\|_{[L^2(\Omega)]^m} \le C e^{mKT + T/2} \sqrt{\frac{T}{\log\left(\frac{1}{\beta}\right)}}. \tag{4.17}$$

trong đó, $\mathscr{U}^{\varepsilon,\beta} := \left(u_1^{\varepsilon,\beta}, u_2^{\varepsilon,\beta}, ..., u_m^{\varepsilon,\beta}\right) \in \left[C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\right]^m$ *là nghiệm chỉnh hóa và* $\mathscr{U} := (u_1, u_2, ..., u_m) \in \left[C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\right]^m$ *là nghiệm của bài toán* (4.15).

Kết quả trên đây được chúng tôi công bố trên tạp chí **Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (SCI, Q1) [A4]**.

4.3.2 Trường hợp hệ số $a := a(x,t;u;\nabla u)$

Trong bài toán (4.1), mở rộng hệ số $a(x,t;u)$ đến trường hợp $a(x,t;u;\nabla u)$, ta xét bài toán sau:

$$\begin{cases} u_t - \nabla\cdot\Big(a\,(x,t;u;\nabla u)\,\nabla u\Big) = F\,(x,t;u(x,t))\,, & (x,t) \in \Omega\times(0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega\times(0,T), \\ u(x,T) = \varphi(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{4.18}$$

Dùng *phương pháp Quasi-reversibility* để chỉnh hóa bài toán (4.18), ta có kết quả sau:

Định lí 4.3.2. *Với* $t \in (0,T]$*, ta có đánh giá sau*

$$\left\| u_\beta^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\right\|_{L^2(\Omega)} \le C\gamma^{-t}(T,\beta). \tag{4.19}$$

Hơn nữa, tồn tại $t^\varepsilon \in (0,T)$ *sao cho* $\lim_{\varepsilon\to 0^+} t^\varepsilon = 0$*, ta có*

$$\left\| u_\beta^\varepsilon(\cdot,t^\varepsilon) - u(\cdot,0)\right\|_{L^2(\Omega)} \le C\frac{1}{\log^{\frac{1}{2}}\left(\gamma(T,\beta)\right)}. \tag{4.20}$$

trong đó, hàm $\gamma : [0,T]\times(0,1)$ *sao cho với* $\beta := \beta(\varepsilon) \in (0,1)$*, thỏa mãn*

$$\gamma(T,\beta) \ge 1, \quad \lim_{\beta\to 0^+}\gamma(t,\beta) = \infty, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Kết quả trên đây được chúng tôi công bố trên tạp chí **SIAM Journal on Mathematical Analysis (SCI, Q1) [A5]**.

4.4 Kết luận Chương 4

Chương 4 đã giải quyết được các vấn đề sau:

- Dùng *phương pháp Quasi-reversibility có điều chỉnh* để chỉnh hóa bài toán (4.1).
- Đưa ra được đánh giá sai số giữa nghiệm chính xác và nghiêm chỉnh hóa trong hai trường hợp của hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz toàn cục và Lipschitz địa phương (Định lí 4.2.1 và Định lí 4.2.3).

KẾT LUẬN CHUNG VÀ KIẾN NGHỊ

I. Kết luận chung

Trong luận án này, chúng tôi đưa ra được các kết quả sau:

Một là, dùng *phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier mới* để chỉnh hóa bài toán parabolic phi tuyến có hệ số hằng.

Hai là, dùng *phương pháp Quasi-reversibility* để chỉnh hóa bài toán ngược thời gian cho phương trình parabolic với hệ số phi địa phương.

Ba là, dùng *phương pháp Quasi-reversibility có điều chỉnh* để chỉnh hóa bài toán phi tuyến với hệ số phi tuyến.

Kết quả chính của luận án đã được công bố trên năm bài báo quốc tế (SCI).

II. Kiến nghị

Trong thời gian tới chúng tôi sẽ nghiên cứu các vấn đề sau:

1. Tiếp tục nghiên cứu phương trình parabolic ngược thời gian có yếu tố ngẫu nhiên.
2. Nghiên cứu phương trình parabolic ngược thời gian trong không gian Banach tổng quát.
3. Nghiên cứu bài toán Cauchy cho hệ phương trình parabolic phi tuyến.
4. Nghiên cứu phương trình đạo hàm riêng có đạo hàm cấp không nguyên theo thời gian.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA NGHIÊN CỨU SINH CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[A1] Nguyen Huy Tuan, Mokhtar Kirane, Bessem Samet, **Vo Van Au** (2016), "A new Fourier truncated regularization method for semilinear backward parabolic problems", *Acta Applicandae Mathematicae*, 148(1), pp. 143–155, (SCI, Q2).

[A2] Nguyen Huy Tuan, **Vo Van Au**, Vo Anh Khoa and Daniel Lesnic (2017), "Identification of the population density of a species model with nonlocal diffusion and nonlinear reaction", *Inverse Problems*, Vol. 33, 055019, (SCI, Q1).

[A3] **Vo Van Au**, Nguyen Huy Tuan (2017), "Identification of the initial condition in backward problem with nonlinear diffusion and reaction", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 452, pp. 176–187, (SCI, Q1).

[A4] **Vo Van Au**, Mokhtar Kirane, Nguyen Huy Tuan (2019), "Determination of initial data for a reaction - diffusion system with variable coefficients", *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, 39(2), pp. 771–801, (SCI, Q1).

[A5] Nguyen Huy Tuan, Vo Anh Khoa, **Vo Van Au** (2019), "Analysis of a quasi-reversibility method for a terminal value quasi-linear parabolic problem with measurements", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 51(1), pp. 60–85, (SCI, Q1).

Một phần trong các kết quả này được báo cáo tại:

- Hội nghị khoa học lần X, Trường ĐH KHTN TP. HCM 11/11/2016,
- Hội Nghị Toán học Miền Trung và Tây Nguyên lần II, Đà Lạt 09-11/12/2017,
- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ IX, Nha Trang 14-18/08/2018.
- Seminar của Bộ môn Giải tích, Khoa Toán - Tin học, Trường ĐH KHTN TP. HCM (9/11/2018).