

Đề thi mẫu

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1.

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

b) Một hộp kẹo sô-cô-la trong tủ lạnh bị ai đó lấy mất. Có 4 bạn nhỏ bị nghi ngờ. Chỉ có 1 trong họ đã lấy kẹo và cũng chỉ có một người trong họ nói thật.

John: “Con không lấy sô-cô-la”

Wendy: “John nói dối”

Charles: “Wendy nói dối”

Sally: ”Wendy đã lấy sô-cô-la”

Hỏi ai đã lấy sô-cô-la?

Câu 2. Các đội bóng T_1, T_2, T_3 và T_4 thi đấu ở vòng loại trực tiếp của một giải đấu. Ở các trận bán kết, T_1 đấu với T_4 còn T_2 đấu với T_3 . Các đội thắng trong các trận bán kết sẽ đấu với nhau ở trận chung kết để xác định đội vô địch. Khi T_i thi đấu với T_j , xác suất mà T_i thắng bằng $\frac{i}{i+j}$. Hãy tìm xác suất của sự kiện đội T_4 đoạt chức vô địch.

Câu 3. Cho hình bình hành ABCD.

a) Hãy biểu diễn các véc-tơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

b) Chứng minh rằng $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Câu 4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC; D là điểm đối xứng của B qua H; K là hình chiếu của C trên đường thẳng AD. Giả sử $H(-5; -5)$, $K(9; -3)$ và trung điểm của cạnh AC thuộc đường thẳng $x - y + 10 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 5. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , SD vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $AD = a$, $AOB = 120^\circ$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 45° . Tính theo a thể tích khối chóp $SABCD$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AC , SB .

Câu 6. Một người nông dân mang đến cho bác thợ rèn một miếng thép kích thước $60\text{cm} \times 96\text{cm}$ và nhờ bác làm thành một chiếc máng hình hộp chữ nhật không nắp với yêu cầu “Bác cứ làm sao để nhà em đựng được nhiều nước nhất là được. Chí ít cũng được 30 lít nhé bác”.

Bác thợ rèn dự định sẽ cắt ở 4 góc 4 hình vuông cạnh x như hình dưới đây



Sau đó gấp 4 hình chữ nhật (màu nhạt) ở 4 phía lên và hàn mép lại thành chiếc máng.

Hỏi bác thợ rèn phải chọn x bằng bao nhiêu cm để chiếc máng có thể tích lớn nhất?